I. M. POPESCU, A. M. PREDA, C. P. CRISTESCU, G. F. CONE
P. E. STERIAN, A. I. LUPAȘCU

PROBLEME REZOLVATE DE FIZICA LASERILOR





EDITURA TEHNICĂ
București

Lucrarea ilustrează problemele fundamentale ale fizicii laserilor şi ale proiectării laserilor şi maserilor.

Cuprinde probleme din următoarele domenii: cavităţi rezonante şi rezonatori optici, principiul de funcţionare şi proprietăţile radiaţiei laser, probleme fundamentale ale fizicii laserilor (teorii asupra laserilor), proiectarea diferitelor tipuri de laseri, aplicaţiile laserilor.

Fiecare capitol este precedat de un scurt breviar teoretic. Problemele sînt în cea mai mare parte originale şi complet rezolvate.

Cartea se adresează atît studenţilor şi cadrelor didactice din învăţămîntul superior, cît şi fizicienilor, chimiştilor, inginerilor - fizicieni, electronişti, subinginerilor precum şi tehnicienilor din domeniu.

PREFAȚĂ

În 1958, A.L. Schawlow și C.H. Townes propuneau extinderea principiului dispozitivelor cuantice funcționînd pe baza fenomenului de emisie stimulată în microunde (MASER) și în domeniul frecvențelor optice (LASER). Se deschidea, astfel, perspectiva generării de unde electromagnetice coerente și în regiunea optică a spectrului (în domeniile infraroșu, vizibil și ultraviolet).

După 16 ani de la inițiativa lui Schawlow și Townes, teoria și realizările experimentale au promovat dispozitivele laser la rangul unora din cele mai utile instrumente de lucru, atît în cercetările de laborator, cît și pentru dezvoltarea de noi tehnologii.

Efectele maser și laser sînt, de fapt, identice în esența lor. Cu toate acestea, realizarea laserilor a avut, în mod cert, un răsunet mult mai mare decît realizarea maserilor. Într-adevăr, maserul, deși introduce concepte cu totul noi, funcționează în domeniul binecunoscut al undelor centimetrice și se integrează în ansamblul echipamentelor pentru producerea undelor electromagnetice coerente. Aportul său esențial, pentru aplicații, a fost de a permite realizarea unor amplificatoare de unde electromagnetice la frecvențe ultraînalte, cu zgomot foarte scăzut, și construcția unor etaloane de frecvență de înaltă stabilitate. Apariția laserului reprezintă, însă, un eveniment revoluționar, prin faptul că proprietăți ale spectrului de radiofrecvență sînt extinse la domeniul frecvențelor optice : laserul realizează, pentru prima dată, o radiație luminoasă coerentă printr-un proces care poate fi analizat după o schemă ce prezintă mari analogii cu cea a unui oscilator clasic la frecvențele radio.

Interesul pe care îl prezintă laserul, este dovedit, în primul rînd, de rapiditatea cu care știința și tehnologia contemporană și-au însușit și au pus în valoare acest instrument de lucru.

Dezvoltarea domeniului laserilor poate fi ilustrată atît prin frecvența și amploarea manifestărilor științifice internaționale care îi sînt dedicate cît și prin numărul de lucrări științifice care apar.

La noi în țară, dezvoltarea domeniului laserilor se datorează, în mare măsură, regretatului profesor Ion I. Agârbiceanu. Încă din anul

1958, după apariția în S.U.A. a primei lucrări științifice din care rezulta posibilitatea creării unui „maser optic", profesorul Ion I. Agârbiceanu împreună cu colaboratorii săi de la Institutul de fizică atomică au abordat acest domeniu. Experiența Laboratorului de metode optice în fizica nucleară, în domeniile spectroscopiei optice de mare putere de rezoluție, pompajului optic, straturilor subțiri și descărcărilor în gaze, a făcut posibilă în 1962, la numai un an de la crearea primului laser cu He-Ne în S.U.A., realizarea primului laser românesc de acest gen. Cercetările laser dezvoltate inițial sub îndrumarea profesorului Ion I. Agârbiceanu se apropie astăzi de o frumoasă maturitate. În prezent construim în țară laseri din cele mai importante tipuri cunoscute în lume și dezvoltăm numeroase cercetări în domeniul laserilor și în alte domenii ale fizicii utilizînd laserii. De asemenea, aplicațiile laserilor în tehnică constituie, în momentul de față, o preocupare de bază a Secției de laseri de la Institutul de fizică atomică.

La Catedra de Fizică a Institutului politehnic din București, condusă odinicară de profesorul Ion I. Agârbiceanu, cercetările asupra laserilor sînt continuate cu succes de colectivul condus de profesorul Ion M. Popescu.

Preocupări susținute în domeniul laserilor se dezvoltă, în prezent și la Institutul de fizică din București, la Facultatea de fizică a Universității din București, la Catedra de Fizică a Universității din Brașov, la Universitatea din Iași ș.a.

Autorii acestei culegeri de probleme sînt, cu toții, specialiști în realizarea și utilizarea laserilor. Lucrarea lor pune la dispoziția celor interesați o parte semnificativă din materialul necesar pentru înțelegerea aprofundată a acestui domeniu. Pe întinderea a 6 capitole cartea tratează probleme de rezonatori optici, de teorie termodinamică a laserilor, de teorie semicuantică a laserilor, de teorie cuantică a laserilor, precum și chestiuni privind proprietățile radiației laser și unele aplicații, acoperind astfel o bună parte din problematica domeniului.

Problemele au fost elaborate pe baza unor lucrări moderne și bine reputate iar succesiunea lor dovedește că autorii au avut în vederea lor logica internă a acestui important capitol al fizicii. Forma de prezentare aleasă pretinde cititorului, așa cum se cuvine, o participare activă la dialogul cu autorii. Majoritatea problemelor sînt urmate de o soluție detaliată și de unele necesare comentarii.

Lucrarea are o pronunțată orientare aplicativă. Ea este destinată atît specialiștilor din cercetare și producție, cît și cadrelor didactice și

studenților de la facultățile de fizică și de la facultățile institutelor de învățămînt superior. Alături de calitățile intrinseci, existența unei asemenea audiențe largi predestinează cartea de față unui succes bine meritat.

Cele 6 capitole ale cărții au o unitate de concepție și expunere. Prezentarea problemelor într-o formă logică și introducerea celor mai importante explicații pentru fiecare problemă, fac din această carte o lucrare de valoare prin care literatura științifică și tehnică își îmbogățește patrimoniul.

Acad. Ioan Ursu

25 iunie 1974

1. CAVITĂŢI REZONANTE ŞI REZONATORI OPTICI

Maserii şi laserii sînt dispozitive care funcţionează pe baza interacţiei dintre cîmpul electromagnetic şi electronii legaţi în atomi, molecule sau ioni. Pentru obţinerea oscilaţiilor este necesar ca interacţia să se producă în interiorul unei cavităţi rezonante. Prin aceasta se realizează cerinţele de densitate mare de radiaţie a cîmpului electromagnetic şi de timp lung de interacţie.

În domeniul microundelor se utilizează cavităţi rezonante paralelipipedice şi cilindrice, cu pereţi metalici şi cu dimensiuni de ordinul lungimii de undă a radiaţiei.

Teoria cavităţilor rezonante constă [1] în rezolvarea ecuaţiilor Maxwell cu condiţiile la limită impuse de tipul de cavitate utilizat. Soluţia generală a problemei în cazul oscilaţiilor libere, de exemplu, este dată de suprapunerea tuturor modurilor *) normale [2, 3], fiecare oscilînd cu o amplitudine arbitrară şi la frecvenţa lui de rezonanţă ω_c, dată de expresia

$$\omega_c^2 \varepsilon\mu = k_c^2. \tag{1.1}$$

Seria infinită de soluţii, corespunzînd la valori diferite ale lui k_c şi dictate de condiţiile la limită pentru intensităţile cîmpurilor electrice şi magnetice, rezultă din rezolvarea ecuaţiilor undelor

$$\nabla^2 \bar{E}_c + k_c^2 \bar{E}_c = 0 \tag{1.2a}$$

şi

$$\nabla^2 \bar{H}_c + k_c^2 \bar{H}_c = 0, \tag{1.2b}$$

funcţiile $\bar{E}_c$ şi $\bar{H}_c$ satisfăcînd proprietăţile de ortogonalitate şi normare, adică

$$\int_V \bar{E}_a \bar{E}_b \, \mathrm{d}V = \delta_{ab} \tag{1.3a}$$

şi respectiv

$$\int_V \bar{H}_a \bar{H}_b \, \mathrm{d}V = \delta_{ab}, \tag{1.3b}$$

unde δ_{ab} este simbolul lui Kronecker.

---

*) Prin *mod* se înţelege o distribuţie staţionară de cîmp electromagnetic, avînd o frecvenţă bine definită.

În teoria cîmpurilor electromagnetice se arată că este convenabil ca în obținerea soluțiilor să se separe cîmpurile în componentele lor transversale (componentele după axele Ox și Oy) și componenta lor longitudinală (componenta după Oz). Atunci, avem

$$\bar{E} = (\bar{E}_t + \bar{1}_z E_z) \exp\ [i(\omega t - kz)] \tag{1.4a}$$

și, respectiv

$$\bar{H} = (\bar{H}_t + \bar{1}_z H_z) \exp\ [i(\omega t - kz)]. \tag{1.4b}$$

Partea corespunzătoare cîmpului $\bar{H}$ longitudinal fiind un cîmp transversal electric se notează prescurtat TE iar partea corespunzătoare cîmpului $\bar{E}$ longitudinal, fiind un cîmp transversal magnetic, se notează TM.

Frecvența unui mod de oscilație în cavitate se exprimă prin [1]

$$\omega = \pm\, \omega_c \left[1 - \left(\frac{1}{2Q_c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + i\frac{\omega_c}{2Q_c}\,, \tag{1.5}$$

unde Q_c este factorul de calitate al cavității dat de

$$Q_c = \frac{\varepsilon\omega_c}{\sigma_e}, \tag{1.6}$$

σ_e fiind conductivitatea electrică a pereților cavității.

În cavitățile rezonante utilizate în construcția maserilor, pierderile fiind datorate dielectricului din cavitate și conducției finite a pereților cavității, factorul de calitate se exprimă prin

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{Q_{dielectric}} + \frac{1}{Q_{pereți}}. \tag{1.7}$$

În domeniul optic cavitățile rezonante sînt de dimensiuni mult mai mari decît lungimea de undă. Astfel, umărul de moduri proprii ΔZ ale cavității pe unitatea de interval de frecvență, în jurul frecvenței ω

$$\Delta Z(\omega) = \frac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3} \tag{1.9}$$

este foarte mare. Reducerea numărului de moduri care ar putea oscila se realizează prin utilizarea unor cavități deschise, care de fapt constau din două oglinzi de anumite raze de curbură R, situate la distanța l una de cealaltă *). În această structură factorul de calitate al rezonatorului pentru un anumit mod va fi

$$Q_c = \omega_c \cdot \tau_c \tag{1.9}$$

*) Această structură poartă numele de *rezonator optic*.

unde τ_c este timpul mediu de viață al modului respectiv. Acest factor de calitate nu are valori suficient de mari pentru realizarea „pragului" de oscilație decît pentru modurile paraxiale. Astfel, caracterizînd modurile din rezonator printr-un triplet de numere întregi r, s, q ($TEM_{r,s,q}$), vor putea oscila numai modurile descrise de valori mici ale numerelor r și s.

Studiul modurilor posibile într-un rezonator optic se face, în general, cu ajutorul teoriei scalare a difracției. În această teorie se consideră că vor constitui moduri ale rezonatorului, acele distribuții de cîmp pe oglindă care se reproduc pînă la un factor care afectează amplitudinea, după reflexia pe oglinda opusă.

Notînd cu $E(x, y)$ și $E'(x', y')$ configurațiile cîmpului pe suprafețele S și S' ale celor două oglinzi, fiecare dintre ele este obținută din contribuția tuturor punctelor oglinzii opuse. Cîmpurile E și E' trebuie să se reproducă reciproc pînă la o constantă compexă γ, respectiv γ', datorată pierderilor; astfel, conform teoriei difracției în aproximația Kirchhoff putem scrie [4—7]

$$\gamma E(x, y) = \int_{S'} \frac{ik(1 + \cos\theta')}{4\pi\rho} \exp\left[-ik\rho\right] E'(x', y')\,\mathrm{d}S' \qquad (1.9a)$$

și

$$\gamma' E'(x', y') = \int_{S} \frac{ik(1 + \cos\theta)}{4\pi\rho} \exp\left[-ik\rho\right] E(x, y)\,\mathrm{d}S, \qquad (1.9b)$$

unde **k** este constanta de propagare în mediul dintre oglinzi iar celelalte mărimi au semnficația din figura 1,a.

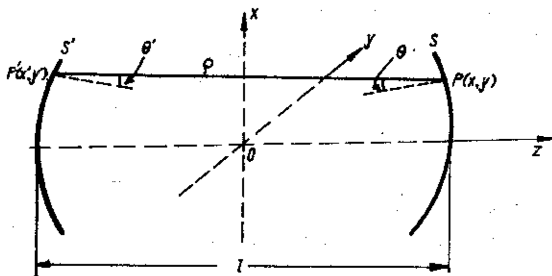


Fig. 1.a

Ecuaţiile de mai sus constituie un sistem de ecuaţii integrale de tip Fredholm, care, în cazul rezonatorului confocal ($l = R_1 = R_2$), pot fi integrate, obţinîndu-se soluţia analitică completă. În alte cazuri integrarea de face numeric.

Frecvenţele ω_c ale modurilor posibile în cazul rezonatorului confocal se obţin cu metoda schiţată mai sus sub forma

$$2 \frac{\omega_c}{\pi c} l = 2q + (r + s + l). \tag{1.10}$$

De asemenea, se obţin distribuţiile de cîmp pe oglinzi. Pe direcţia x, distribuţia de cîmp va fi

$$f_r(x) = \text{const. } \mathscr{H}_r\left(x\sqrt{\frac{2\pi}{R\lambda}}\right) \exp\left(-\frac{\pi x^2}{R\lambda}\right),$$

$\mathscr{H}_r(u)$ fiind polinomul Hermite de ordin r, unde $u = x\sqrt{\frac{2\pi}{R\lambda}}$.

În particular, pentru modul TEM_{00q} distribuţia cîmpului va avea o formă gaussiană.

Deoarece în interiorul rezonatorului suprafeţele de undă ale cîmpului electromagnetic au curburi care variază între zero (la centrul rezonatorului) şi curbura oglinzii (pe suprafaţa oglinzii), rezonatorul confocal este echivalent cu un rezonator cu oglinzi cu raze diferite dacă acestea sînt plasate în locurile cerute. În acest fel teoria rezonatorului confocal se extinde şi la celelalte tipuri de rezonatori. Ca rezultat al teoriei se obţine, printre altele, condiţia de stabilitate (pentru pierderi minime), sub forma

$$0 \leqslant \left(\frac{l}{R_1} - 1\right)\left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leqslant 1. \tag{1.11}$$

Această condiţie poate fi bine înţeleasă dacă se face o reprezentare grafică în care $\frac{l}{R_1}$ şi $\frac{l}{R_2}$ sînt luate ca axe de coordonate rectan-

gulare (fig. 1, b). Fiecare punct din această diagramă reprezintă un rezonator cu o anumită geometrie. Condiţia de stabilitate arată că numai rezonatorii reprezentaţi prin puncte în zona haşurată sînt stabili.

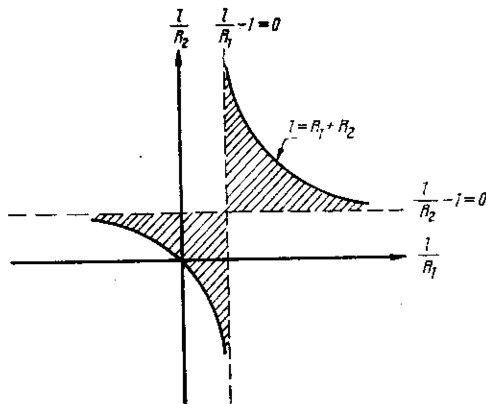


Fig. 1.b.

În proiectarea unui rezonator optic este necesar să fie realizate următoarele condiţii [8]:

— factor de calitate mare (pierderi mici);

— reducerea la maximum a numărului de moduri prin obţinerea unui ecart de frecvenţă cît mai mare între acestea;

— cuplaj optim cu exteriorul;

— volum optim al modului care oscilează;

— toleranţă cît mai mare la dezaliniere.

*
* *

PROBLEME

1.1. Se consideră o cavitate rezonantă, cu pereţii perfect conductori, avînd forma unui cilindru cu generatoarea paralelă cu axa z suprafeţele bazelor fiind două plane perpendiculare pe această axă, în punctele $z = 0$ şi $z = l$. Mediul din interior este omogen, izotrop, nedisipativ şi fără sarcini electrice.

1°. Să se arate că în interiorul cavității pot exista oscilații proprii de tip TM ($H_z = 0$) și TE($E_z = 0$). Se vor deduce expresiile frecvențelor acestor moduri (și a lungimilor de undă) pentru cilindrul circular drept și în cazul în care cavitatea ar fi un paralelipiped dreptunghic.

2°. Să se demonstreze următoarele relații de ortogonalitate

a) $$\int_V \bar{E}_m \bar{E}_n \, \mathrm{d}V = 0 \qquad m \neq n$$

b) $$\int_V \bar{H}_m \bar{H}_n \, \mathrm{d}V = 0. \qquad m \neq n.$$

Integrarea se efectuează pe volumul cavității.

c) Dacă

$$\oint_\Sigma (\bar{H}_m \times \bar{H}_n) \cdot \mathrm{d}\bar{A} = 0$$

atunci există și relația

$$\int_V \bar{E}_m \cdot \bar{H}_n \, \mathrm{d}V = 0 \qquad m \neq n,$$

Σ fiind suprafața cavității.

3°. Se cere expresia energiei electromagnetice din cavitate, pentru un mod de oscilație de tip TM.

4° .Aplicație numerică: să se calculeze lungimile de undă și frecvențele modurilor TM_{110}, TM_{111}, TE_{111} și TE_{101} într-un rezonator cilindric de rază a = 5 cm și de lungime $l = 10$ cm; cavitatea este vidată $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s.

Indicație: Problema se va rezolva în cazul unui sistem de coordonate curbilinii ortogonale, cu următoarele proprietăți;

— parametrul Lamé corespunzător lui z este $h_3 = h_z = 1$;

— raportul celorlalți doi parametri Lamé nu depinde de z

$$\frac{\partial(h_1/h_2)}{\partial z} = 0.$$

1.2. O cavitate rezonantă în formă de cub cu muchia de lungime L are un vîrf în O şi trei muchii orientate după axele Ox, Oy, Oz ale unui triedru drept. Cavitatea este vidată şi are pereţii perfect conductori (fig. 1.2).

1°. În cavitate se produce un cîmp electromagnetic de frecvenţă ω; modalitatea de excitare tinde să dezvolte un cîmp electric paralel cu axa Oz. Plecînd de la ecuaţia undelor electromagnetice şi de la condiţiile impuse cîmpurilor acestor unde în vecinătatea pereţilor, să se arate că este posibil să se obţină stări staţionare în care intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ este paralelă la axa Oz şi are un modul independent de z, cu condiţia ca să existe o relaţie între lungimea L şi lungimea de undă λ_0 în vid a undei plane de frecvenţă ω. Se va pune

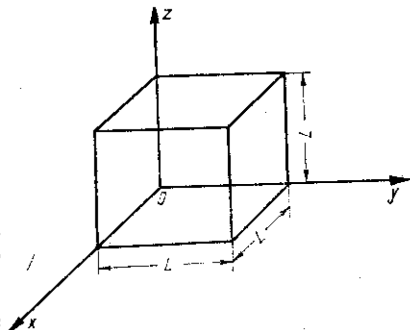


Fig. 1.2

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y).$$

Să se determine valoarea minimă a lui L şi să se calculeze pentru $\omega = 6\pi \cdot 10^9$Hz.

2°. Lungimea L avînd valoarea minimă precedentă şi E_0 reprezentînd amplitudinea maximă a lui E_z, să se exprime cîmpurile E_z, H_x, H_y, H_z în funcţie de x, y, z, t şi de parametrii L, E_0 şi ω. Să se exprime în funcţie de L şi de E_0 energia medie înmagazinată în cavitate.

Se va face calculul pentru $\omega = 6\pi \cdot 10^9$Hz şi $E_0 = 10^7 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.

1.3. 1°. Să se calculeze, pentru modul TE_{110}, puterea disipată pe unitatea de arie prin efect Joule, într-un rezonator paralelipipedic cu pereţi de cupru. Se dau:

— dimensiunile cavităţii $a = b = 3$ cm, $l = 4$ cm;

— conductivitatea pereţilor $\sigma_e = 5{,}95 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$;

— valoarea cîmpului magnetic la interfaţa dielectric-metal $H_0 = 10^3$ A·m^{-1}.

Se cere acelaşi calcul pentru modurile TE_{101} şi TE_{111}.

Ce se poate spune despre pierderile modului dominant (cu lungimea de undă maximă).

2°. Se defineşte factorul de calitate al cavităţii

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia electromagnetică din cavitate}}{\text{energia pierdută într-o perioadă}},$$

Pentru modul TE_{110}, factorul de calitate în cavitatea paralelipipedică de la punctul 1° are expresia

$$Q = 0{,}71 \frac{\lambda_{110}}{\delta} \frac{b}{l + 2b},$$

unde δ este adîncimea de pătrundere a cîmpului cu lungimea de undă λ_{110} în pereţii de cupru. Să se calculeze după cît timp de la încetarea excitaţiei, energia electromagnetică din cavitate se reduce la o zecime din valoarea sa de regim.

Cavitatea este vidată.

Pentru cupru $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$.

3°. Care este lărgimea spectrală a modului TE_{110} determinată de acest factor de calitate?

1.4. Cîmpul electromagnetic dintr-o cavitate rezonantă închisă, fără sarcini şi curenţi, cu pereţii conductori, umplută cu un mediu cu permitivitatea electrică ε şi permeabilitatea magnetică μ, se poate exprima în funcţie de modurile normale ale cavităţii astfel:

$$\bar{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_q p_q(t) \bar{E}_q(\bar{r})$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_q \omega_q q_q(t)\, \bar{H}_q(\bar{r})$$

unde $\bar{E}_q$ şi $\bar{H}_q$ specifică modurile de oscilaţie.

$$\int \bar{E}_q \bar{E}_s \,\mathrm{d}V = \delta_{qs}; \int \bar{H}_q \bar{H}_s \,\mathrm{d}V = \delta_{qs},$$

ω_q fiind frecvenţa caracteristică a modului de oscilaţie.

1°. Să se calculeze, folosind dezvoltările de mai sus, hamiltoniana sistemului, considerînd că aceasta este dată de energia totală înmagazinată în rezonator.

2°. Să se verifice că o astfel de alegere a funcției Hamilton este în concordanță cu ecuațiile lui Maxwell, dacă se identifică $q_r(t)$ și $p_r(t)$ cu coordonatele și respectiv impulsurile generalizate.

1.5. În aproximația opticii geometrice, un rezonator confocal pentru laseri este echivalent cu un sistem afocal de lentile de tipul celui prezentat în figura 1.5 a. În acest sistem fiecare pereche de

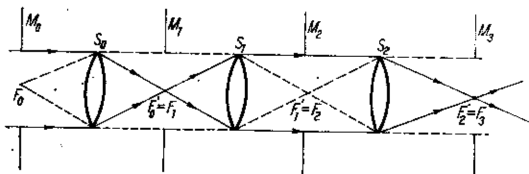


Fig. 1.5 a

lentile consecutive, de exemplu S_i și S_{i+1}, reprezintă un sistem afocal. Distanța focală a fiecărei lentile o considerăm egală cu unitatea. Cu alte cuvinte, punctul focal posterior F_i' al lentilei S_i coincide cu punctul focal anterior F_{i+1} al lentilei S_{i+1} și deci, separarea d dintre planul principal posterior al lui S_i și planul principal anterior al lui S_{i+1} este egală cu dublul distanței focale a unei lentile.

Să considerăm că avem un subsistem de n lentile $S_0, S_1, S_2, \ldots$ $\ldots, S_{n-1}$, așezate astfel încît distanța d este diferită de dublul distanței focale (figura 1.5 b). Care este condiția pe care trebuie să o îndeplinească acest subsistem pentru ca să formeze un sistem afocal?

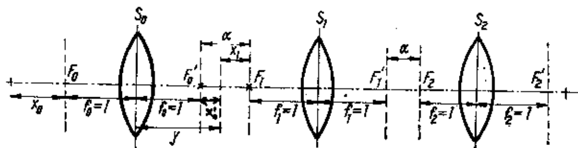
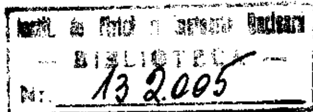


Fig. 1.5 b

1.6. În aplicațiile care se bazează pe monocromaticitatea radiației laser este necesar să se separe din fasciculul laser numai unul dintre modurile de oscilație. În acest scop radiația laser se trece printr-un interferometru Fabry-Pérot pentru selectarea unuia dintre modurile longitudinale și printr-o apertură circulară care elimină modurile transversale.



Se utilizează un laser cu He-Ne care are lungimea rezonatorului $l = 1,5$ m. Condiția de prag de oscilație este îndeplinită pentru toate modurile longitudinale de sub profilul Doppler al mediului activ pentru care „înălțimea" curbei Doppler depășește 1/4 din „înălțimea" maximă.

Să se calculeze:

1°. Care va fi distanța dintre oglinzile interferometrului Fabry-Pérot.

2°. Care va fi lărgirea benzii de trecere a interferometrului dacă coeficientul de reflexie al oglinzilor este $r = 95\%$.

Se cunosc: lungimea de undă a radiației $\lambda = 6328$ Å, masa moleculară a neonului $M = 20$ și temperatura $T = 300°$K.

1.7. Să se calculeze distribuția intensității luminoase în interiorul unui interferometru Fabry-Pérot în cazul în care acesta este iluminat cu o undă luminoasă, plană, monocromatică sub unghiul de incidență θ_i. Să se calculeze intensitatea luminoasă medie din interiorul interferometrului în cazurile:

1°. Cînd unghiul de incidență, θ_i, corespunde concordanței de fază între cele 2 grupe de raze luminoase care sosesc într-un punct dat de la cele 2 oglinzi ale interferometrului;

2°. Cînd unghiul de incidență este astfel ales încît cele două grupe de raze luminoase sînt în antifază.

Se consideră coeficientul de reflexie al oglinzilor $r = 0,97$.

1.8. Asupra unui interferometru Fabry-Perot se trimite o undă luminoasă plană monocromatică sub o incidență θ_i față de normala la suprafețele reflectoare. Să se arate că intensitatea unui maxim din imaginea de interferență a undelor emergente este egală cu intensitatea fasciculului incident, în timp ce intensitatea unui minim depinde de coeficientul de reflexie al oglinzilor interferometrului. Să se calculeze raportul dintre intensitatea maximului și intensitatea minimului din radiația emergentă în cazul în care factorul de reflexie al oglinzilor interferometrului este $\mathcal{R} = 0,94$.

1.9. Se trimite o undă electromagnetică plană, monocromatică, pe una din fețele reflectătoare ale unui rezonator Fabry-Pérot, sub un unghi de incidență θ_i.

1°. Să se arate că pentru unghiurile de incidență, care corespund unui acord de fază, rezonatorul joacă rolul unui strat antireflectător.

2°. Să se studieze distribuția fazei în franjele din interiorul rezonatorului pentru incidență normală și pentru o incidență oarecare.

1.10. Între oglinzile identice ale unui rezonator Fabry-Pérot se află atomi distribuiți uniform ce emit lumină incoerent.

1°. Să se arate că energia luminoasă este concentrată în rezonator sub forma unor inele strălucitoare și să se calculeze de cîte ori este mai mare strălucirea acestora față de cazul în care atomii nu ar fi închiși între fețele reflectătoare ale rezonatorului.

2°. Să se arate că energia totală radiată de atomi se conservă.

1.11. Se consideră o cavitate Fabry-Pérot, avînd dimensiunile $l = 1$ m, $2a = 10^{-2}$ m (fig. 1.11). Oglinzile $OABC$ și $DEFG$ au factorul de reflexie $\mathcal{R} = 0{,}98$. Presupunem că această cavitate Fabry-Pérot este utilizată ca rezonator pentru realizarea unui laser cu He-Ne care emite radiație avînd lungimea de undă $\lambda = 6328$ Å. Indicele de refracție al mediului laser-activ din cavitate se va considera $n_r \simeq 1$ (viteza luminii în vid $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

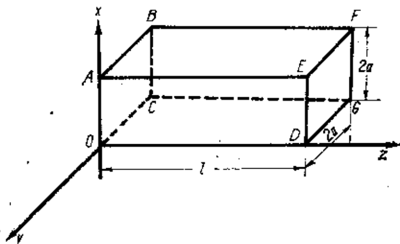


Fig. 1.11

Se cere să se calculeze:

1°. Timpul de viață al fotonilor în etalonul Fabry-Pérot, respectiv factorul de calitate al cavității;

2°. Numărul modurilor longitudinale și separația în frecvență dintre acestea;

3°. Numărul modurilor transversale și separația în frecvență dintre acestea;

4°. Frecvența de rezonanță a acestei cavități Fabry-Pérot.

1.12. Considerăm o cavitate optică avînd cele două oglinzi O_1 și O_2 plane așezate la distanța d una față de cealaltă (fig. 1.12).

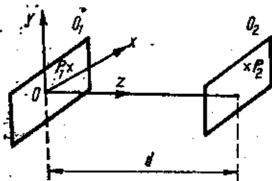


Fig. 1.12

O rază de lumină care pleacă din punctul $P_1(x_1, y_1)$ al unei oglinzi, în direcția care face unghiurile $\theta_{r1} = \theta$ și $\Phi_{r1} = \Phi$ cu raza normală în acel punct la oglindă, în planele xz și yz, respectiv, ajunge în punctul $P_2(x_2, y_2)$ al celeilalte oglinzi, după direcția care face unghiurile θ_{i2} și Φ_{i2} cu raza normală în acest punct.

1°. Să se deducă matricele de transfer T_x^{12}, T_y^{12} definite de relațiile

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_{i2} \end{bmatrix} = T_x^{12} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta \end{bmatrix} \text{și} \begin{bmatrix} y_2 \\ \Phi_{i2} \end{bmatrix} = T_y^{12} \begin{bmatrix} y_1 \\ \Phi \end{bmatrix}$$

și matricele de reflexie R_x, R_y, definite

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_{r2} \end{bmatrix} = R_x \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta \end{bmatrix} \text{și} \begin{bmatrix} y_2 \\ \Phi_{r2} \end{bmatrix} = R_y \begin{bmatrix} y_2 \\ \Phi \end{bmatrix}$$

unde θ_{r2}, Φ_{r2}, poziționează direcția de plecare a razei de la oglinda O_2 în raport cu normala în P_2.

2°. Să se calculeze matricea lui Bertolotti $\mathscr{B} = RT^{12}\ RT^{21}$ a unui parcurs dus-întors între cele două oglinzi și matricea $\mathscr{B}^n$ a n parcursuri complete între oglinzi.

3°. Definind stabilitatea unei cavități prin condiția ca $|x|$, $|y|$, $|\theta|$, $|\Phi|$ să nu devină mai mari decît valorile inițiale, după un anumit număr de parcursuri dus-întors ale razei între oglinzi, să se deducă condiția necesară de stabilitate a unei cavități.

1.13. Tubul de descărcare în cazul unui laser cu He-Cd are o lungime (distanța dintre ferestrele așezate la unghi Brewster) $d = 70$ cm. Pentru realizarea rezonatorului necesar se folosesc două oglinzi concave cu razele de curbură $R_1 = R_2 = 1$m.

Să se determine limitele între care poate varia distanța l dintre oglinzi pentru ca rezonatorul să fie stabil. Se consideră că oglinzile au suprafețe suficient de mari încît pierderile prin difracție să fie mici (deci, să se poată aplica optica geometrică). În această aproximație rezonatorul este stabil dacă o rază de lumină din interior nu îl părăsește oricît de multe drumuri ar efectua dus și întors între oglinzi.

1.14. Studiul de optimizare a puterii a condus la concluzia că oglinda de ieșire în cazul unui laser cu He-Cd trebuie să aibă un factor de reflexie $\mathscr{R} = 98{,}6\%$.

Întrucît pierderile prin absorbție ale oglinzii trebuie să fie minime, aceasta se realizează prin depunerea de straturi dielectrice multiple. Folosindu-se pentru depunere sulfură de zinc, care are indicele de refracție $n_{r1} = 2{,}3$ și criolit, care are indicele de refracție $n_{r2} = 1{,}35$, iar substratul fiind de sticlă cu indicele de refracție $n_r = 1{,}52$, se cere să se calculeze:

1°. Grosimea acestor straturi știind că lungimea de undă în vid pentru radiația emisă este $\lambda = 4416$ Å.

2°. Numărul de straturi necesar pentru a realiza reflexia cerută. Se va ține seama de faptul că lumina cade pe oglindă sub incidență normală.

1.15. Într-un cristal de Y_2O_3, dopat cu pămîntul rar Eu^{3+}, se obține efectul laser pentru lungimea de undă de 0,6113 μm emisă de Eu^{3+}. Dacă cristalul are lungimea $d = 10^{-2}$ m și indicele de refracție $n_r = 1{,}83$, să se calculeze:

1°. Numărul N de moduri de oscilație ale cîmpului electromagnetic ce apar în cristalul-cavitate rezonanță.

2°. Densitatea de moduri de oscilație din cristal.

1.16. Un rezonator laser avînd oglinzile sferice cu razele de curbură R_1 și R_2, așezate neconfocal la o distanță l una de cealaltă, este echivalent din punctul de vedere al opticii geometrice cu o succesiune de n lentile subțiri care satisfac condițiile:

1°. O lentilă $S_i (i = 0, 1, \ldots, n - 1)$ a sistemului de n lentile are distanța focală $f_i = 1$.

2°. Distanța de la focarul posterior al lentilei S_{i-1} la focarul anterior al lentilei S_i este $\alpha = 2 - 4\left(1 - \frac{l}{R_1}\right)\left(1 - \frac{l}{R_2}\right)$.

Pornind de la condiția ca sistemul de n lentile să fie afocal (dedusă în problema 1.5) să se deducă condiția de stabilitate a rezonatorului laser echivalent.

1.17. Considerăm un rezonator confocal, cu oglinzi sferice pătrate, de latură $2a$, apertura, raza de curbură și distanța dintre oglinzi fiind mult mai mari ca lungimea de undă λ (fig. 1.17).

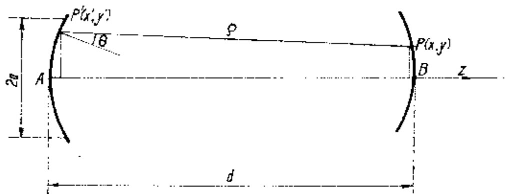


Fig. 1.17

Cîmpul de radiație e liniar polarizat și traversează înainte și înapoi spațiul dintre oglinzile rezonatorului, cu pierderi foarte mici, astfel încît constanta de relaxare a cavității este mult mai mare decît perioada de oscilație a cîmpului și sistemul poate fi considerat în stare staționară. Fie cîmpul reflectat de oglinda A, de forma $E_0 f_r(x') \cdot g_s(y')$, unde E_0 este un factor de amplitudine, iar $f_r(x')$ și

$g_s(y')$ sînt variațiile cîmpului de radiație peste apertură, indicii r și s specificînd distribuțiile posibile ale cîmpului în rezonator (moduri de oscilație).

Distribuția cîmpului în punctul P va fi dată, conform integralei Kirchhoff-Fresnel de expresia:

$$\bar{E} = \int_{S'} \frac{ik(1+\cos\theta)}{4\pi\rho} \exp\left[-ik\rho\right] \bar{E}_0 f_r(x')\, g_s(y')\, \mathrm{d}S'$$

unde ρ este distanța între punctele P și P' (vezi figura 1.17).

Presupunem că distribuția cîmpului și a modurilor normale ale cavității rezonatorului se reproduce peste fiecare oglindă succesiv, după relația $\bar{E} = \bar{E}_1 f_r(x) \cdot g_s(y)$, unde $\bar{E}_1 = \sigma_r \sigma_s \bar{E}_0$. Prin mărimile σ_r, σ_s, se ține seama de schimbările de amplitudine și fază pe care le suferă cîmpul în urma reflexiilor succesive. Cu notațiile de normare $X = x\sqrt{c/a}$, $Y = y\sqrt{c/a}$, $c = a^2k/R = 2\pi\mathcal{N}$, unde $\mathcal{N} = a^2/b\lambda$ este numărul lui Fresnel, și cu $F_r(X) = f_r(x)$ și $G_s(Y) = g_s(y)$ se obține expresia $\sigma_r \sigma_s F_r(X)\, G_s(Y) = \frac{i}{2\pi} \exp\left[-ikR\right] \int_{\sqrt{c}}^{+\sqrt{c}} \int_{\sqrt{c}}^{+\sqrt{c}} F_r(X')$ $\exp\left[ixx'\right] G_s(Y') \cdot \exp\left[iyy'\right]\, \mathrm{d}X'\, \mathrm{d}Y'$, R fiind raza de curbură a oglinzilor.

1°. Să se scrie ecuațiile integrale care dau distribuția cîmpului după direcțiile X și Y ale rezonatorului.

2°. Să se obțină expresiile funcțiilor proprii $F_r(X)$ și $G_s(Y)$.

3°. Folosind valorile proprii corespunzătoare funcțiilor proprii de la punctul 2°, să se deducă condițiile de rezonanță ale cavității.

Să se discute, pe baza lor, modurile de oscilație ale cavității.

4°. Să se scrie expresiile explicite ale funcțiilor proprii care specifică modurile de oscilație.

5°. Să se reprezinte grafic distribuția cîmpului peste apertură, pentru modurile TEM_{00}, TEM_{10}, TEM_{20}.

6°. Să se indice o metodă de verificare experimentală a faptului că valorile negative ale lui $\bar{E}(x)$, se datoresc schimbării de fază cu π.

1.18. Radiația electromagnetică parcurge n drumuri dus și întors printr-o cavitate avînd cele două oglinzi A și B plane, circulare, paralele, de rază a și separate prin distanța l (fig. 1.18).

1°. Să se determine condiția ca pierderile prin difracție să fie neglijabile.

Aplicaţie numerică la:

a) un laser cu rubin, pentru care $l = 10^{-1}$ m, $2a = 10^{-2}$ m, lungimea de undă în vid $\lambda_0 = 6943 \cdot 10^{-10}$ m şi indicele de refracţie $n_r = 1,76$.

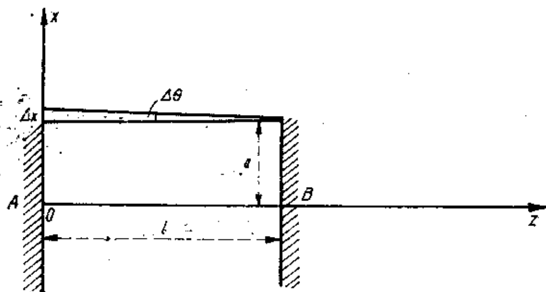


Fig. 1.18

b) un laser cu argon, pentru care $l = 5 \cdot 10^{-1}$ m, $2a = 2 \cdot 10^{-3}$ m, lungimea de undă $\lambda = 4880 \cdot 10^{-10}$ m.

2°. Să se verifice condiţia obţinută la punctul 1° cu ajutorul principiului de incertitudine al lui Heisenberg.

1.19. Un caz special al cavităţilor rezonante îl constituie fibrele optice, în care au loc oscilaţii nestaţionare (modurile avînd forma undelor progresive). Se cere să se arate că:

1°. În cazul propagării radiaţiei optice printr-o fibră optică cu centri fluorescenţi cu patru nivele energetice, se obţine un cîştig care depinde de frecvenţa radiaţiei;

2°. Semilărgimea liniei radiaţiei incidente $\Delta\omega_0$ care se propagă într-o fibră optică scade, scăderea depinzînd de factorul de cîştig şi că îngustarea liniei spectrale are loc independent de faptul că se produce sau nu o amplificate în timpul propagării radiaţiei prin fibra optică;

3°. Pentru lungimi mici ale fibrelor optice, intensitatea radiaţiei — care se propagă în fibră — creşte liniar cu distanţa, iar în cazul lungimilor mari, densitatea radiaţiei nu depăşeşte o anumită valoare, care este de fapt maximul densităţii de radiaţie ce se obţine prin amplificarea în interiorul fibrei optice.

1.20. Pentru transmisia luminii laser între două puncte oarecare se folosește o fibră optică cilindrică. Pentru lungimea de undă laser, indicele de refracție al miezului fibrei $n_r = 1,55$ și indicele de refracție al învelișului fibrei $n'_r = 1,40$. Fibra se găsește în aer al cărui indice de refracție se consideră $n_0 = 1$.

Să se calculeze:

1°. Apertura numerică a fibrei.

2°. Valoarea limită a unghiului θ determinat de direcția unei raze acceptată în fibră și direcția axei fibrei.

3°. Care trebuie să fie indicele de refracție n_r al mediului de la intrarea și ieșirea fibrei pentru ca pierderile prin reflexie la capete să fie minine.

4°. Presupunînd că pierderile în fibră sînt determinate numai de absorbția în miezul fibrei, pe care o presupunem negativă, să se determine cîștigul în fibră dacă puterea radiației laser incidente pe fibră $\mathscr{P}_i$ este mai mică de zece ori decît puterea radiației emergente din fibră $\mathscr{P}_e$.

2. TEORIA TERMODINAMICĂ A LASERILOR (ECUAȚIILE RATELOR)

În anii 1916—1917, Einstein [9, 10], demonstrînd formula lui Planck pentru densitatea de radiație spectrală emisă de un corp negru, a arătat că substanța poate fi în echilibru termic cu radiația, dacă au loc trei tipuri de procese de interacție : absorbița radiației de către substanță, emisia de radiație în mod spontan și emisia de radiație în mod stimulat de către substanță.

Echilibrul detaliat al acestor procese duce la o serie de „ecuații ale ratelor", care guvernează interacția dintre radiație și substanță în teoria termodinamică a laserilor. Ecuațiile ratelor [11, 12, 13], în cazul laserilor, se împart în două grupuri : a) ecuații de cîmp și *b*) ecuații de substanță.

Considerăm că interacția are loc între cîmpul electromagnetic, reprezentat prin M moduri și substanță, ca sistem cu L nivele energetice atomice.

Un mod va fi deosebit prin indicele λ, care se referă atît la lungimea de undă, cît și la toate celelalte proprietăți spațiale ale acestuia. Aceste M moduri interacționează cu cei N atomi din rețea (mediul laser activ), fiecare atom avînd poziția definită de x_μ. Tranziția optică, avînd loc între nivelele atomice oarecare, $|2\rangle$ și $|1\rangle$, reprezintă „linia laser emisă". Alte nivele ale sistemului mediu laser activ participă la procesele de pompaj și relaxare.

a) *Ecuațiile cîmpului* descriu variația în timp a numărului mediu de fotoni n_λ ai unui mod λ sub influența pierderilor și cîștigului în interiorul cavității rezonante sau rezonatorului optic în prezența mediului activ. Pierderile, cauzate de transmisia prin oglinzile rezonatorului, difracție, împrăștiere pe centrii de impurități, neomogenitățile mediului activ, etc. sînt luate în considerație prin atribuirea unui timp de viață al fotonului în rezonatorul optic

$$\tau_c = \frac{1}{2} k_\lambda \tag{2.1}$$

rata de pierderi fiind

$$-\,2k_\lambda n_\lambda. \tag{2.2}$$

Cîştigul de fotoni în interiorul rezonatorului optic este datorat emisiei spontane şi induse. Rata de emisie spontană de pe nivelul $|2\rangle$ al atomului μ în modul λ este dată de

$$N_{2\mu}\, w^0_{2\lambda\mu} \tag{2.3}$$

$N_{2,\mu}$ fiind numărul de ocupare corespunzător nivelului $|2\rangle$ al atomului μ şi rata $w_{2\lambda\mu}$ exprimîndu-se în aproximaţia de dipol electric, prin

$$w^0_{2\lambda\mu} = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\omega_\mu - \omega_\lambda)^2}\, |g_{\mu\lambda}|^2 \tag{2.4}$$

unde

$$g_{\mu\lambda} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi\omega_\lambda}{\hbar}}\; e\bar{l}_\lambda\, \bar{\theta}_{21} U_\lambda(x_\mu) \tag{2.5}$$

În expresiile (2.4) şi (2.5), $\frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\omega_\mu - \omega_\lambda)^2}$ ţine seama de faptul că linia corespunzătoare tranziţiei $|2\rangle \to |1\rangle$ are o formă Lorentz, γ fiind semilărgimea acestei linii. În aceleaşi expresii, ω_μ este frecvenţa centrală a liniei atomice, ω_λ este frecvenţa modului λ în cavitate în absenţa mediului activ, θ_{21} este marticea momentului dipol al tranziţiei atomice $|2\rangle \to |1\rangle$, $\bar{e}_\lambda$ caracterizează polarizarea modului şi $U_\lambda(x_\mu)$ este amplitudinea modului λ.

Cîştigul de fotoni este dat de expresia

$$n_\lambda w^0_{2\lambda\mu}(N_2 - N_1)_\mu. \tag{2.6}$$

ţinînd seama de procesele de emisie stimulată şi de absorbiţie. Astfel, în final, ecuaţiile de cîmp iau forma

$$\dot{n}_\lambda = -2k_\lambda n_\lambda + n_\lambda \sum_\mu w^0_{2\lambda\mu}(N_2 - N_1)_\mu. \tag{2.7}$$

b) *Ecuaţiile pentru substanţă* pot fi deduse în mod similar.

α) Pentru nivelele care participă la procesul laser aceste ecuaţii au forma

$$\dot{N}_{2,\mu} = \sum_{l\neq 2} w_{l,2} N_{l,2} - N_{2,\mu} \sum_{l\neq 2} w_{2,l} - \sum_\lambda n_\lambda W^0_{\lambda\mu}(N_2 - N_1)_\mu \tag{2.8}$$

şi

$$\dot{N}_{1,\mu} = \sum_{l\neq 1} w_{l,1} N_{l,\mu} - N_{1,\mu} \sum_{l\neq 1} w_{1,l} + \sum_{\lambda} n_{\lambda} W^{0}_{\lambda\mu}(N_2 - N_1)_{\mu}. \quad (2.9)$$

β)Pentru alte nivele care sînt utilizate pentru procesul de pompaj avem

$$\dot{N}_{m,\mu} = \sum_{l\neq m} w_{lm} N_{l,\mu} - N_{m,\mu} \sum_{l\neq m} w_{ml}. \quad (2.10)$$

Ecuaţiile (2.8 — 2.10) nu sînt independente între ele. Însumînd aceste ecuaţii pentru toate nivelele atomului μ, avem

$$\sum_{l} N_{l,\mu} = \text{const.}, \quad (2.11)$$

adică pentru un singur electron avem

$$\sum_{l=1}^{L} N_{l,\mu} = 1. \quad (2.12)$$

În expresiile (2.8 — 2.10), w_{lm} reprezintă rata tranziţiei de la nivelul $|l\rangle$ la $|m\rangle$ pentru atomul μ, produsă de pompajul optic extern, ciocnirile de speţa a doua, excitarea prin ciocniri cu electroni, tranziţiile spontane neradiative şi radiative, ş.a.

Ecuaţiile ratelor (2.7 — 2.10), rezolvate în regim staţionar şi în cazul dependenţei de timp, reuşesc să explice următoarele fenomene laser: — condiţia de prag; — puterea de ieşire în funcţie de puterea de pompaj; — coexistenţa modurilor în linii lărgite omogen şi neomogen; — cascadele laser; — pulsul laser „gigant" şi — „picurile" amortizate (regimul relaxat).

Defectul fundamental al teoriei termodinamice constă în faptul că ea nu conţine efectele de coerenţă din cîmpul de radiaţie.

* * *

PROBLEME

2.1. Pe baza echilibrului detaliat al proceselor de absorbţie, emisie spontană şi emisie indusă, care intervin în interacţia radiaţiesubstanţă, să se stabilească ecuaţiile ratelor pentru laseri cu trei şi cu patru nivele.

Să se arate că în anumite condiţii, este posibilă reprezentarea prin două nivele a laserilor cu trei şi patru nivele.

2.2. Linia cu lungimea de undă de 6943 Å emisă de laserul cu rubin ($Al_2O_3 : Cr^{3+}$) apare datorită tranziţiilor între nivelele, $\bar{E}$ şi $^4A_2$ ale impurităţilor de Cr^{3+} care prezintă o degenerescenţă de ordinul 2 şi respectiv 4. La mecanismul de emisie participă şi nivelul $2\bar{A}$ care ajută la popularea nivelului $\bar{E}$, datorită proponderenţei tranziţiilor $2\bar{A} \rightarrow \bar{E}$ asupra celor $2\bar{E} \rightarrow {}^4A_2$. Schema acestor nivele energetice este dată în figura 2.2.

Se cunosc următorii parametrii ai laserului cu rubin:

— distanţa dintre nivelele $(2\bar{A},\ \bar{E}) = 29\ \text{cm}^{-1}$

— lărgimea liniei spectrale, $\Delta\omega = 1{,}3 \cdot 10^{13}\ \text{s}^{-1}$ la 300°K

— concentraţia ionilor de $Cr^{3+} = 2 \cdot 10^{19}\ \text{cm}^{-3}$.

— timpul de viaţă datorat emisiei spontane $\tau_{sp} = 3 \cdot 10^{-3}$ s.

— $\omega = 1{,}7 \cdot 10^{16}\ \text{s}^{-1}$

— degenerescenţa: $g_2 = g(\bar{E}) = 2$
$g_1 = g(^4A_2) = 4$

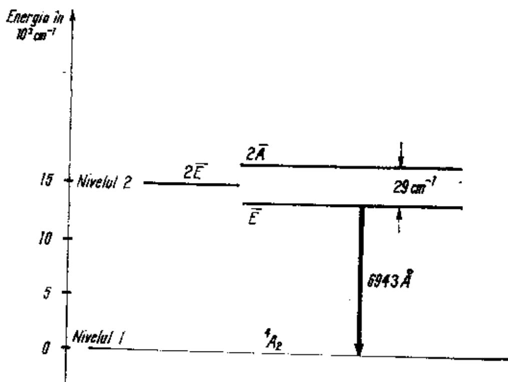


Fig. 2.2

— timpul de viață al fotonului în cavitate, $\tau_c = 2.10^{-8}$s (corespunde unei lungimi a mediului activ de 10 cm și unui coeficient de pierderi pe tranzit de 0,02).

Se lucrează la temperatura de 27°C și se consideră o repartiție Boltzmann a populațiilor între nivelele $2\bar{A}$ și $\bar{E}$.

Se se calculeze :

1°. Inversia de populație la pragul de oscilație.

2°. Populațiile nivelelor $N(2\bar{A})$, $N(\bar{E})$, $N(^4A_2)$. Să se tragă concluzii asupra nivelelor degenerate la prag, în valoare absolută.

3°. Factorul de calitate al cavității.

2.3. Într-un laser cu CO_2 rata de relaxare a energiei de al nivelul inferior laser, 10°0, al moleculelor de CO_2 din unitatea de volum a mediului activ se poate obține cu relația

$$\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right) - \frac{p_0}{\tau_{11}}\left[\mathscr{E}(T) - \mathscr{E}(T_0)\right]$$

unde : $\tau_{11} = 3 \cdot 10^{-3}$ s este timpul de relaxare a energiei moleculelor de CO_2 la temperatura de 330°K ș presiunea 1 torr, p_0 — presiunea gazului de CO_2 care constituie mediul activ, $\mathscr{E}(T)$ — energia de vibrație efectivă a moleculelor de CO_2 din unitatea de volum și aflate pe nivelul 10°0 în regim de emisie laser, $\mathscr{E}(T_0)$ — valoarea aceleiași energii în cazul în care are loc stabilirea echilibrului după gradele de libertate de translație. Egalitatea din relația dată este valabilă pînă la o constantă arbitrară considerată aici egală cu unitatea.

Să se calculeze :

1°. Rata de relaxare a moleculelor de CO_2 de pe nivelul 10°0 în cazul în care în mediul activ se introduc vapori de apă la presiunea $p_1 = 0{,}2$ torri care au rolul de a mări viteza de relaxare a energiei de pe nivelul inferior laser.

2°. Timpul de relaxare efectiv, τ, a nivelului 10°0 al CO_2 în prezența vaporilor de apă.

Se consideră că : $p_0 = 1$ torr, $\mathscr{E}(T) = 600$ J/m^3, $\mathscr{E}(T_0) = 1{,}3$ J/m^3.

Timpul de relaxare a vaporilor de apă la temperatura de 330°K și presiunea de 1 torr se ia $\tau_{22} = 10^{-4}\ \tau_{11}$.

2.4. Mediul activ al unui laser este constituit dintr-un amestec de două gaze A și B, gazul A avînd trei nivele energetice iar B două nivele energetice, astfel încît nivelul excitat al gazului B să fie foarte apropiat de nivelul cel mai de sus, $|3\rangle$, al gazului A.

Presupunînd că se cunosc următoarele mărimi caracteristice amestecului :

— $\frac{1}{t_{BA}}$ — rata per atom de gaz A în starea fundamentală pentru transfer de energie de la atomii gazului B la atomii gazului A care ajung astfel pe nivelul $|3\rangle$,

— $\frac{1}{t_{AB}}$ rata per atom excitat de gaz A de transfer al energiei prin procesul invers,

— τ_{32} și τ_{31} timpii de viață ai atomilor de gaz A din starea 3 datorită tranzițiilor radiative spre nivele inferioare 2, respectiv 1,

— θ_{31} și θ_{21} timpii de viață ai atomilor din stările 3, respectiv, 2 datorită tranzițiilor spre nivelul 1, produse prin ciocniri neelastice de speța a doua cu electronii

să se determine condițiile în care prezența gazului B contribuie la producerea diferenței de populație între nivelele 3 și 2 ale gazului A și cînd prezența acestuia împiedică procesul de inversie a populației.

2.5. Un maser cu trei nivele are schema energetică arătată în fig. 2.5, unde $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$ sînt valorile energiei celor trei nivele, Ω_{21} — frecvența tranziției de relaxare, Ω_{31} — frecvența tranziției de pompaj și Ω_{32} — frecvența tranziției stimulate.

Folosind ecuațiile ratelor și făcînd analogia între diferența de populații a nivelelor energetice și diferența de potențial electric și între ratele de tranziție și conductivitatea electrică :

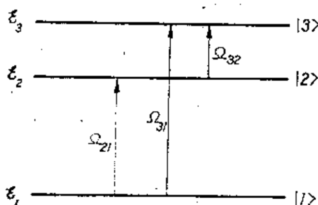


Fig. 2.5

1°. Să se găsească un circuit electric echivalent maserului cu trei nivele.

2.° Să se găsească cum se transformă circuitul electric în cazul saturării nivelelor datorită pompajului, cînd maserul devine amplificator.

2.6. Inversia de populaţie în laserii gazoşi se obţine de cele mai multe ori pe seama transferului rezonant de excitaţie într-un amestec de două gaze. Într-un amestec gazos de sodiu şi cadmiu nivelul metastabil $5\,^3P_0$ al cadmiului ($\mathscr{E}_{5P_0} = 30114\ \text{cm}^{-1}$) este apropiat de nivelele $4p(\mathscr{E}_{4P_{3/2}} = 30273\ \text{cm}^{-1}$ şi $\mathscr{E}_{4P_{1/2}} = 30267\ \text{cm}^{-1})$ ale sodiului, fapt care permite ca prin ciocniri de speţa 2-a să se transfere energia de excitaţie de la nivelul 5^3P_0 al cadmiului la nivelele $4p$ ale sodiului. Prin tranziţiile $4p \to 3d$ poate avea loc emisia laser la lungimile de undă $\lambda = 90938$ Å, 90941 Å şi 92252 Å. Schema nivelelor de energie dată în figura alăturată arată că un astfel de laser este un laser cu 3 nivele.

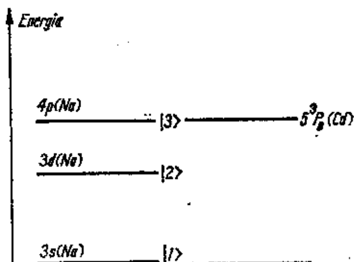


Fig. 2.6

Din tabele se extrag pentru ratele tranziţiilor între nivelele $4p$ (notate pe figura 2.6 cu $|3\rangle$) $3d$ (notate pe figura 2.6 cu $|2\rangle$) şi $3s$ (fundamental — notat pe figura 2.6.1 cu $|1\rangle$) valorile :

$$w_{32} = 0{,}16 \cdot 10^6\ s^{-1},$$

$$w_{21} = 50 \cdot 10^6\ s^{-1},$$

$$w_{31} = 9{,}1 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} \text{ şi } \frac{g_3}{g_2} = 3/2$$

Pornind de la ecuaţiile ratelor pentru un sistem laser cu 3 nivele, să se evalueze puterea laser emisă de unitatea de volum a unui astfel de mediu dacă presupunem că el se află într-o cavitate rezonantă cu lungimea $l = 10$ cm şi cu factorul de reflexie al ambelor oglinzi 99%. De asemenea, presunem că mediul se află la o temperatură de 300°K, ceea ce corespunde la o densitate a vaporilor de sodiu de 10^{21} atom/m³.

2.7. Să se determine în cazul unui laser cu mediu activ benzoilacetat de europiu (chelat cu pămînt rar) dependenţa densităţii de populaţie a nivelului laser superior de probabilităţile de tranziţie şi de concentraţia totală de molecule şi să se calculeze :

1°. densitatea de populaţie a nivelului laser superior necesară pentru apariţia efectului laser,

2°. intensitatea radiației de pompaj necesară pentru a realiza densitatea de populație calculată la punctul 1°.

Se cunosc :

— coeficientul de reflexie al oglizilor $r = 0{,}95$

— lungimea mediului activ $l = 10^{-1}$ m.

— indicele de refracție al mediului activ $n_r = 1{,}5$

— lungimea de undă laser $\lambda = 6130 \cdot 10^{-10}$ m.

— semilărgirea liniei laser $\Delta\lambda = 8 \cdot 10^{-10}$ m.

— timpul de viață al nivelului laser superior $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ s.

— procentul de molecule ce realizează tranziția laser $k = 10\%$

— eficiența cuantică $\eta = 0{,}8$

— coeficientul de absorbție pentru radiația de pompaj $\Gamma = 5000$ m^{-1}.

—frecvența radiației de pompaj $\omega = 10^{15}$ s^{-1}

— probabilitatea de tranziție indusă între nivelele 4 și 5, $w_{45} = 0{,}9$.

2.8. Să se calculeze factorul de reflexie al oglinzii de ieșire a unui laser care să asigure puterea de ieșire maximă pentru o anumită putere de pompaj. Calculul se va efectua în două cazuri :

1°. Laser cu mediu activ cu caracteristicile : lungimea cavității $l = 0{,}5$ m, coeficientul de amplificare nesaturat $\alpha_0 = 100$ m^{-1}, indicele de refracție $n_r = 1{,}8$.

2°. Laser cu gaz cu caracteristicile : lungimea cavității $l = 0{,}5$ m, coeficientul de amplificare nesaturat $\alpha_0 = 0{,}9$ m^{-1}, $n_r = 1$.

În ambele cazuri frecvența este $\omega = 2 \cdot 10^{15}$ s^{-1} iar factorul de calitate al cavității în lipsa cuplajului cu exteriorul (oglinzi perfect reflectătoare) $Q_c = 10^9$.

2.9. Maserul cu hidrogen funcționează în felul următor. Un fascicul atomic de hidrogen trece printr-un cîmp magnetic separator, care focalizează numai atomii care se află în stările $|F = 1, M = 1\rangle$ și $|F = 1, M = 0\rangle$. Aceștia pătrund într-un balon de cuarț, ai cărui pereți sînt acoperiți cu o peliculă de teflon, cu rolul de a mări timpul de viață al atomilor (atomii suferă în medie 10^5 ciocniri cu pereții, fără a fi perturbați). Balonul se află într-o cavitate rezonantă cilindrică, excitată pe modulul TE_{011}, cu o frecvență apropiată de cea a tranziției hiperfine $|F = 1, M = 0\rangle \to |F = 0, M = 0\rangle$. Se observă oscilația maserului la 1420 MHz, dacă pierderile sînt acoperite de energia furnizată de atomi.

Excitarea se face printr-un cablu coaxial, terminat cu o buclă de cuplaj.

Se presupune că în cavitate există numai modul TE_{011}.

1°. Să se modeleze ecuațiile cîmpului electromagnetic din cavitate, cu ajutorul unor scheme electrice echivalente. Se va studia efectul adaptării cavității cu cablul de excitare.

2°. Să se găsească condiția de oscilație (de prag).

3°. Folosind formalismul matricii densitate, să se găsească susceptibilitatea magnetică a gazului. Se vor lua în considerare diferitele mecanisme de relaxare : ciocniri atom-atom, ciocniri cu pereții vasului, acumularea atomilor în cavitate.

4°. Se cere dependența puterii furnizate de maser de fluxul de atomi. Să se discute condițiile de oscilație (se folosește condiția de prag și expresia părții imaginare a susceptibilității magnetice).

2.10. Un amplificator laser cu rubin poate fi construit în două variante : I) cu cavitate rezonantă și II) cu undă călătoare. Considerăm că amplificatorul posedă în ambele cazuri o amplificare la centrul liniei $G_0 = \exp\,[\alpha_0 L] = 2$, în care L este lungimea rubinului amplificator, pe care o luăm astfel încît $n_r L = 10$ cm ; n_r este indicele de refracție al rubinului pentru lungimea de undă amplificată.

Să se afle :

1°. Lărgimea de bandă transmisă de etalonul Fabry-Pérot, cu fețele plan paralele, cu coeficientul de reflexie $r = 0{,}45$ pe capetele rubinului amplificator în cazurile : a) cînd rubinul nu este excitat ; b) cînd este excitat și posedă amplificarea dată mai sus.

2°. Care este lărgimea de bandă maximă care poate fi transmisă de amplificatorul cu undă călătoare dacă rubinul amplificator se găsește la temperatura camerei.

3°. Cu cît variază amplificarea maximă a amplificatorului cu cavitate rezonantă dacă G_0 variază de la valoarea 2 la valoarea 2, 1.

4°. Care trebuie să fie coeficientul de reflexie maxim la granița dintre rubin și aer în cazul amplificatorului cu undă călătoare pentru ca amplificarea să fie stabilă.

5°. Care este valoarea lui G_0 pentru care amplificatorul cu cavitate rezonantă se transformă în generator laser.

3 – c. 2093

2.11. În laserii cu mediu activ solid, de mare putere, apar în mediul activ şi în elementele optice ale laserului defecte termice care se datoresc absorbţiei puternice a radiaţiei laser în incluziunile metalice sau dielectrice, adică în impurităţile cu proprietăţi fizice şi optice diferite de acelea ale materialului gazdă.

Să se calculeze:

1°. factorul de absorbţie al radiaţiei în incluziune,

2°. distanţa focală a lentilei ce se formează datorită regiunii încălzite puternic din jurul incluziunii, ştiind că temperatura în incluziune este $T = 900°K$ şi variaţia indicelui de refracţie cu temperatura este $\frac{dn_r}{dT} = 2 \cdot 10^{-4} \, °K^{-1}$.

Se cunosc: lungimea de undă în vid a radiaţiei emise de un laser cu mediu activ sticlă dopată cu neodim $\Lambda = 1,06 \cdot 10^{-6}$ m,

— indicele de refracţie al sticlei $n_r = 1,52$

— raza incluziunii de formă sferică $r_0 = 6,7 \cdot 10^{-8}$ m.

2.12. Considerăm cazul unui dispozitiv electrono-cuantic (maser sau laser) care funcţionează numai datorită tranziţiei dintre două nivele energetice, ca în figura 2.12.

Se cere să se deducă condiţia de prag urmărind evoluţia densităţii de radiaţie în mediu, iluminarea fiind făcută cu radiaţie monocromatică de frecvenţă ω_0 şi de intensitate proporţională cu densitatea de radiaţie $u_\omega(\omega_0)$.

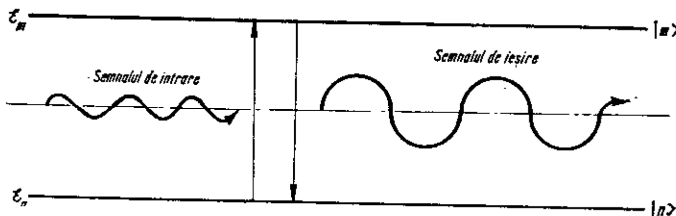


Fig. 2.12

2.13. Un baston de rubin (indicele de refracţie $n_r = 1,76$) este excitat într-o cavitate elipsoidală, de un flash asimilat unui corp negru. Pentru micşorarea pragului efectului laser, se înconjoară

bastonul cilindric cu o teacă de oxid de aluminiu, cu acelaşi indice de refracţie.

1°. Să se calculeze de cîte ori scade pragul de pompaj (puterea de pompaj pe unitatea de arie).

2°. Să se calculeze de cîte ori scade puterea totală de pompaj.

2.14. Pentru un laser cu trei nivele să se calculeze randamentul cuantic, definit ca raportul dintre numărul de fotoni emişi spontan, prin tranziţia activă laser şi numărul total de fotoni, absorbiţi prin pompaj.

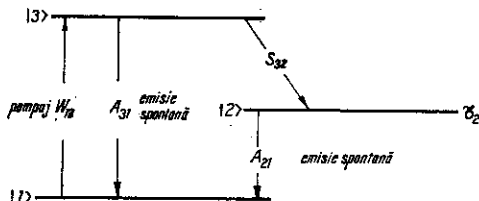


Fig. 2.14

Aplicaţie numerică în cazul laserului cu rubin (fig. 2.14):

$$A_{21} = 232 \text{ s}^{-1},\ A_{31} = 3 \cdot 10^{5} \text{ s}^{-1},\ S_{32} = 2 \cdot 10^{7} \text{ s}^{-1},\ \tau_2 = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \text{s}$$

A_{21} şi A_{31} sînt coeficienţii Einstein ai tranziţiilor radiative între nivelele $|2\rangle$ şi $|1\rangle$ şi respectiv $|3\rangle$ şi $|1\rangle$, S_{32} este rata tranziţiei neradiative $|3\rangle \to |2\rangle$, iar τ_2 este timpul de viaţă al stării $|2\rangle$.

2.15. Să se calculeze puterea disipată în mediul activ al unui laser cu rubin. Mediul activ este un sistem cu trei nivele, pentru care se cunosc:

— concentraţia de ioni activi de Cr^{3+} : $N_a = 1{,}6 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}$

— lungimea de undă a radiaţiei de pompaj $\lambda_p = 5500$ Å

— timpul de viaţă al nivelului laser $\tau_2 = 3$ ms, la 300°K; la 70°K, timpul de viaţă este $\tau_s' = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ s.

Se neglijează emisia spontană $|3\rangle \to |1\rangle$.

Rezistenţa termică a rubinului este $R_{th} = 10^{-6}\ \text{W} \cdot {}^{0}\text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$; rubinul se topeşte la 2500°K. Gradele de degenerare ale nivelelor laser sînt:

$$g_2 = 2,\ g_1 = 4.$$

Să se compare funcţionarea laserului, la temperatura camerei şi la temperatura azotului lichid (70°K).

2.16. Un flux de radiaţie electromagnetică a cărei intensitate este $I_0 = 10^4$ W/m² şi frecvenţă $\omega = 3 \cdot 10^{15}$ s^{-1} cade pe o substanţă care are o frecvenţă de rezonanţă optică ω_{mn} foarte apropiată de ω.

Să se calculeze:

1°. Secţiunea eficace de absorbţie integrală a radiaţiei per atom.

2°. Puterea absorbită de unitatea de volum a mediului.

Se cunosc:

— densitatea atomică a materialului $N_0 = 10^{25}$ m^{-3}

— indicele de refracţie al mediului $n_r = 1{,}8$

— degenerarea nivelului superior $g_m = 2$

— momentul de dipol electric al tranziţiei $|\vec{\mu}^e_{nm}| = 1{,}2$ debye $= 4 \cdot 10^{-31}$ C·m

— semilărgimea bandei de absorbţie $\Delta\omega = 3 \cdot 10^{10}$ s^{-1}.

Se presupune că nivelul inferior al tranziţiei de absorbţie este cel fundamental.

2.17. Considerăm un laser cu Ga As avînd grosimea joncţiunii $p - n$ egală cu $2d$ şi grosimea mediului activ $2l$, ca în figura 2.17.

1°. Să se calculeze grosimea $2l$ a mediului activ în care are loc confinarea modurilor:

a) în regim de emisie spontană, cînd variaţia constantei dielectrice se datoreşte plasmei create de purtătorii de sarcină,

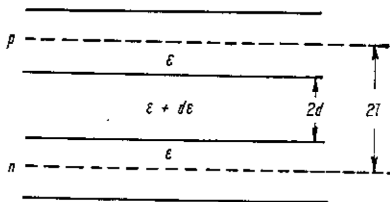


Fig. 2.17

b) în apropierea pragului de apariţie a emisiei stimulate, cînd variaţia constantei dielectrice se datoreşte efectului de rezonanţă.

2°. Să se calculeze valoarea densității de curent J_s corespunzătoare pragului de emisie stimulată.

Se dau: densitatea de purtători $N = 7{,}2 \cdot 10^{22}\ \text{m}^{-3}$

— grosimea joncțiunii $2d = 1{,}8 \cdot 10^{-6}$ m.

— masa efectivă a electronilor: $m^* = 0{,}072\ m_e = 0{,}648 \cdot 10^{-31}$ kg

— lungimea de undă emisă în vid $\lambda_0 = 0{,}84 \cdot 10^{-6}$ m.

— conductivitatea electrică $\sigma_e = 25\ \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

— indicele de refracție $n_r = 3{,}6$

— coeficientul de absorbție total $\Gamma = 2 \cdot 10^4\ \text{m}^{-1}$

— eficacitatea cuantică $\eta = 0{,}96$

— semilărgirea liniei emisă spontan $\Delta\omega = 3{,}78 \cdot 10^{13}$ rad · s^{-1}

2.18 Laserii cu mediu activ semiconductor sînt formați dintr-o regiune activă îngustă, de lățime d, mărginită de două regiuni pasive mai groase, în care apar pierderi.

1°. Admițînd apariția unui cîștig în regiunea stratului sărăcit de purtători de sarcină a joncțiunii $p-n$, să se determine grosimea necesară joncțiunii pentru ghidarea și confinarea modurilor.

2°. Să se scrie expresiile cîmpului electric în cele trei regiuni (activă și cele două pasive):

a) ținînd cont de pierderile din dielectric

b) neglijînd pierderile din dielectric.

3°. Să se scrie condiția de prag pentru apariția efectului laser, în cazul unor pierderi finite, pentru structura asimetrică a joncțiunii $p-n$ din GaAs.

2.19. Să se demonstreze că emisia spontană corespunde emisiei induse dacă ar exista un singur foton pe mod.

2.20. Considerîndu-se un sistem atomic ai cărui electroni se pot afla în două stări energetice $\mathscr{E}_1$ și, respectiv $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_2 > \mathscr{E}_1$, tranzițiile dintre cele două stări energetice fiind guvernate de relația lui Planck: $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 = \hbar\omega_0$ și mediul format din astfel de sisteme atomice aflîndu-se într-o cavitate de volum V_c, se cere:

1°. Să se arate, cu ajutorul teoriei lui Maxwell, pentru cîmpul electromagnetic, că în anumite condiții, un astfel de mediu amplifică undele electromagnetice;

2°. Să se exprime factorul de calitate al mediului funcție de constanta dielectrică a mediului și funcție de indicele de refracție și inidicele de extincție ai mediului;

3°. Să se arate că această tratare deși este — în cea mai mare parte — macroscopică, conține procesele de absorbție, emisie indusă

și emisie spontană de radiație din teoria lui Einstein asupra radiației;

4°. Considerînd factorul de calitate al cavității, Q_c, să se arate în ce condiții sistemul global (mediu + cavitate) va putea funcționa ca un oscilator.

2.21. În cazul a două nivele energetice ale unui sistem de atomi, situați la temperatura T, nivelul energetic superior avînd energia $\mathscr{E}_2$ și cel inferior — energia $\mathscr{E}_1$, raportul numărului de atomi, N_2, respectiv N_1, este dat de relația lui Boltzmann

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left[-\frac{\Delta\mathscr{E}}{kT}\right].$$

unde $\Delta\mathscr{E} = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$, și degenerescențele sînt egale ($g_2 = g_1$).

1°. Intervalul de energie $\Delta\mathscr{E} = \hbar\omega$ corespunde unei tranziții de rezonanță paramagnetică electronică din regiunea microundelor, adică, $\omega = 6\pi \cdot 10^9 s^{-1}$ și temperatura este $T = 300°K$ (aproximativ temperatura camerei). Care este diferența de populație fracționară $\frac{N_2 - N_1}{N_1}$?

2°. Considerînd aceeași situație, cu excepția că $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ s^{-1} și $T = 4{,}2°K$ (temperatura heliului-4 lichid), care este valoarea lui $\frac{N_2 - N_1}{N_1}$?

3°. Considerînd $T = 300°K$ și o diferență de energie $\Delta\mathscr{E}$, care corespunde tranziției optice pentru $\lambda = 6000$ Å, care este raportul $\frac{N_2}{N_1}$?

4°. Ce temperatură T este necesară pentru a face ca N_2 să fie 10% din N_1, în cazul 3°?

2.22. Timpul de viață al atomilor pe stările între care are loc tranziția laser este de importanță deosebită în alegerea mediilor active. Determinarea acestei mărimi pentru o anumită stare excitată necesită cunoașterea variației coeficientului de absorbție cu intensitatea radiației pentru o tranziție care are starea de interes ca stare superioară.

Să se arate cum este posibil acest lucru și să se calculeze valoarea timpului de viață (timpul de relaxare longitudinală), al stării, știind că frecvența tranziției laser considerate este $\omega = 3 \cdot 10^{15} s^{-1}$ iar intensitatea de saturare (valoarea intensității pentru care coeficientul de absorbție se reduce la jumătate) $I_{sat} = 7 \cdot 10^6 W \cdot m^{-2}$.

Coeficientul de absorbţie determinat la intensitate mică are valoarea $\Gamma_0 = 300 \text{ m}^{-1}$ iar densitatea de atomi activi este $N = 10^{25} \text{ m}^{-3}$.

2.23. Să se determine diferenţa de populaţie de prag şi puterea minimă de pompaj necesară pentru realizarea acestei inversii în cazul unui laser cu rubin.

Se cunoaşte valoarea coeficientului de absorbţie nesaturat $\Gamma_0 = 300 \text{ m}^{-1}$, lungimea cilindrului de rubin $d = 10$ cm şi frecvenţa radiaţiei laser $\omega = 2{,}7 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

Pierderile se consideră că provin numai din reflexiile pe oglinzi acestea avînd factorii de reflexie $\mathcal{R}_1 = 0{,}50$, respectiv $\mathcal{R}_2 = 0{,}96$.

Densitatea de ioni este $N_0 = 10^{25} \text{ m}^{-3}$ iar timpul de relaxare al populaţiei spre starea de echilibru, în lipsa pompajului, este $T = 4 \cdot 10^{-3}$ s.

2.24. În procesele care se produc într-un laser cu gaz sînt implicate trei nivele energetice. Ştiind că avem de a face cu o lărgire omogenă, să se calculeze diferenţa de populaţie la prag necesară în cazul unui asemenea laser.

Se cunosc: frecvenţa tranziţiei laser $\omega = 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$, lungimea rezonatorului optic $l = 1$m, pierderea relativă de energie pe un parcurs $\gamma = 0{,}03$, temperatura absolută a gazului $T = 400$°K, masa atomică a gazului $M = 20$ iar timpul de viaţă al nivelului superior al tranziţiei laser, datorită tranziţiei spontane $|3\rangle \to |2\rangle$, este $\tau = 10^{-6}$ s. Se neglijează tranziţiile spontane către alte nivele.

2.25. Presupunînd că în cazul unui laser cu rubin mecanismul de formare a pulsului gigant este descris corect de modelul teoretic dat de Wagner şi Lengyel, să se calculeze energia şi puterea maximă a unui puls pentru următoarele caracteristici ale laserului:

— numărul de atomi activi în unitatea de volum a mediului $N_0 = 2 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$,

— coeficientul de absorbţie nesaturat $\Gamma_0 = 40 \text{ m}^{-1}$,

— lungimea mediului activ $d = 0{,}1$ m,

— secţiunea mediului activ $S = 10^{-4} \text{ m}^2$.

— distanţa optică dintre oglinzi $l = 0{,}6$ m.

— factorul de pierderi (pierderea relativă de energie pe un parcurs) $\gamma = 0{,}06$ dintre care pierderi utile $\gamma_u = 0{,}7\gamma$.

— raportul dintre diferenţa de populaţie iniţială şi diferenţa de populaţie la maxim $\dfrac{N^{(i)}}{N^{(m)}} = 4$.

— frecvenţa radiaţiei emise $\omega = 2{,}7 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

2.26. Se consideră un laser cu trei nivele care funcţionează în regim „Q-switch".

1°. Plecîndu-se de la ecuaţiile ratelor pentru un laser cu trei nivele, se cere:

a) Să se stabilească expresiile mărimilor B (coeficientul Einstein de emisie stimulată) şi τ_c (timpul mediu de viaţă al fotonilor în cavitate);

b) să se stabilească ecuaţiile de funcţionare ale laserului cu trei nivele care funcţionează în regim „Q-switch";

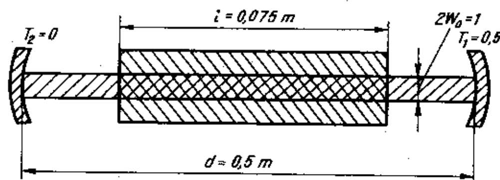


Fig. 2.26

c) Rezolvînd ecuaţiile de funcţionare ale aceluiaşi laser, să se calculeze puterea de ieşire, energia de ieşire, timpul de creştere şi timpul de scădere pentru impulsul laser obţinut.

2°. Se consideră – ca laser cu trei nivele – un laser cu rubin ale cărui dimensiuni sînt date în figura 2.26.

Acest laser oscilează pe un mod TEM_{00} avînd dimensiunea spotului $W_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ m. Se presupune că laserul lucrează în regim „Q-switch" cu o energie de pompaj de două ori mai mare decît pragul regimului laser în absenţa regimului „Q-switch". Se cere să se calculeze:

a) Puterea de vîrf, în afara oglinzii $\mathscr{T}_1$;

b) Timpul de creştere al pulsului de lumină, în afara oglinzii $\mathscr{T}_1$;

c) Timpul de scădere al pulsului de lumină în afara oglinzii $\mathscr{T}_1$.

Se cunosc:

– pierderile interne: $T_i = 5 \cdot 10^{-2}$ s;

– concentraţia de Cr^{3+}: 0,05 %;

– secţiunea eficace absorbţie a ionilor materialului activ, la lungimea de undă de lucru, $\sigma = 2,5 \cdot 10^{-24}$ m².

2.27. În producerea pulsurilor laser gigant participă z moduri, intensitatea cîmpului electric al unui mod polarizat după o direcţie dată fiind $E_j(t)$. Se cere:

1°. Intensitatea pulsului gigant, ştiind că intensitatea unui mod este $I_0 \propto |\mathscr{E}_0|^2 \propto |\mathscr{E}_j(t)|^2$ şi că între modurile care produc pulsul gigant nu există nici o relaţie de fază.

2°. Intensitatea pulsului gigant în cazul în care modurile sînt sincronizate şi între frecvenţe există o separaţie constantă $\Delta\omega_0$, intensitatea unui mod fiind tot $I_0 \propto |E_0|^2$.

În acest caz, să se calculeze şi semilărgimea pulsului laser.

2.28. Un laser cu sticlă dopată cu Nd^{3+} are în cavitate o celulă cu un absorbant saturabil. Acesta este un sistem atomic cu două nivele de energie, cu timpul de viaţă al stării superioare $\tau = \frac{1}{w} = 2 \cdot 10^{-11}$ s (w este rata emisiei spontane). Absorbţia celulei scade odată cu creşterea intensităţii cîmpului electric din cavitate.

Se presupune că intensitatea fiecărui puls al laserului este constantă pe toată durata sa şi că absorbantul îşi revine complet în perioada dintre două pulsuri.

1°. Analizînd dependenţa numărului de fotoni absorbiţi de lungimea pulsului, să se arate că absorbantul favorizează impulsurile foarte scurte. Să se deducă de aici că laserul are modurile sincronizate (modurile sînt în fază). Se va calcula numărul de fotoni absorbiţi în celula cu absorbant, la o traversare.

2°. Să se calculeze lărgimea pulsului.

Aplicaţie numerică:

— coeficientul de amplificare efectiv (diferenţa dintre cîştig şi pierderile totale în mediul activ) în regiunea liniară a funcţionării este 0,2,

— gradul de saturaţie (numărul de fotoni absorbiţi la o trecere, divizat cu numărul de molecule al absorbantului) este

$$\sigma_a n = 0,3.$$

σ_a este secţiunea de absorbţie diferenţială, iar n numărul de fotoni dintr-un puls.

3°. Dacă absorbantul nu este lipit de fereastra de ieşire, în cavitate pot apărea (teoretic) două pulsuri simultane, cîte unul de fiecare parte a celulei. Să se studieze probabilitatea acestui fenomen, în funcţie de distanţa d între celula cu absorbant şi fereastra de ieşire.

2.29. Să se studieze dependenţa de timp a amplitudinii oscilaţiei rezultante emisă de un laser multimodal cu mediu activ solid, în cazul sincronizării modurilor axiale apropiate (ale căror curbe de rezonanţă se intersectează, ceea ce duce la o interacţiune a modurilor). Să se arate că amplitudinea oscilaţiei rezultante e modulată atît în înaltă frecvenţă cît şi în joasă frecvenţă.

Se va considera cazul a trei moduri axiale ce se deosebesc doar prin unul din indicii transversali.

3. TEORIA SEMICUANTICĂ A LASERILOR

Teoria semicuantică a laserilor este fundamentată pe ecuațiile clasice de cîmp și cuantice de substanță, care se pot obține din ecuațiile cuantice printr-o operație de mediere peste procesele de pompaj și relaxare. Ca urmare, fluctuațiile cuantice sînt înlăturate, simplificîndu-se mult tratarea unor fenomene în cercetarea cărora se pot neglija schimbările lente de fază ale cîmpului electric, produse de aceste fluctuații [11].

Teoria semicuantică este foarte potrivită pentru tratarea unor fenomene ca: tîrîrea frecvenței, efectele de modulație, picurile neatenuate, ecoul fotonic, supraradianța, pulsurile ultrascurte generarea de armonici, împrăștierea Raman și Brillouin stimulată etc.

Un alt mod de construire a teoriei semicuantice, care pleacă de la formalismul general al operatorului densitate este prezentat în [12]. În continuare se prezintă rezultatele acestei teorii.

Operatorul densitate

Definiția operatorului densitate este [12]:

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|. \tag{3.1}$$

Ecuațiile de mișcare pentru elementele de matrice ale operatorului densitate sînt

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial t} = \hbar\omega_{ij}\rho_{ij} + [\mathscr{H}', \rho]_{ij} - \frac{i\hbar}{T_2}\rho_{ij} \tag{3.2}$$

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{jj}}{dt} = [\mathscr{H}', \rho]_{jj} + \frac{i\hbar}{T_1}(\rho_{jj}^e - \rho_{jj}) \tag{3.3}$$

unde $\omega_{ij} = (\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_j)/\hbar$, T_2 este timpul de relaxare spin-spin, T_1 — timpul de relaxare spin-rețea, ρ_{jj}^e — valoarea de echilibru a elementului de matrice pentru $\mathscr{H}' = 0$, $\mathscr{H}'$ fiind acea parte a hamiltonianului sistemului care ia în considerare interacțiunea dintre mediu și perturbația aplicată din exterior.

Ecuațiile de mișcare pentru valoarea medie a unui operator $\hat{A}$:

a) Ecuația de mișcare pentru valoarea medie a unui operator, în cazul în care toate elementele diagonale ale matricii asociate sînt nule

$$\langle \dot{A} \rangle + \frac{\langle A \rangle}{T_2} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, \mathscr{H}] \rangle \tag{3.4}$$

unde $\mathscr{H}$ reprezintă hamiltonianul sistemului, iar $\langle A \rangle$ valoarea medie a operatorului.

b) Ecuația de mișcare pentru valoarea medie a unui operator în cazul în care numai elementele diagonale ale matricii asociate sînt diferite de zero:

$$\langle \dot{A} \rangle + \frac{\langle A \rangle - \langle A \rangle^e}{T_1} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, \mathscr{H}] \rangle \tag{3.5}$$

Tranziții de dipol

Hamiltonianul unui atom în cîmp electromagnetic

$$\mathscr{H} = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \mathscr{V} - \bar{\mu}^e \bar{E}(\bar{R}, t) - \bar{\mu}^m \bar{B}(\bar{R}, t) +$$

$$+ \frac{e}{2} \bar{r}\bar{r} \nabla_{\bar{R}} \bar{E}(\bar{R}, t) + \frac{e^2}{8m} [\bar{r} \times \bar{B}(\bar{R}, t)]^2. \tag{3.6}$$

În expresia de mai sus, primii doi termeni reprezintă hamiltonianul neperturbat în absența cîmpului electromagnetic, al treilea termen reprezintă interacțiunea de dipol electric, al patrulea termen interacțiunea de dipol magnetic, al cincilea interacțiunea de cuadrupol electric, iar ultimul ține seama de proprietățile diamagnetice ale atomului.

S-au folosit notațiile: $\bar{p}$ — pentru impulsul electronului, $\mathscr{V}(r)$ pentru potențialul nucleului, $\bar{r}$ pentru vectorul de poziție al electronului în raport cu nucleul, e și m pentru masa și sarcina electronului, $\bar{\mu}^e = -e\bar{r}$ pentru momentul de dipol electric, $\bar{\mu}^m$ pentru momentul de dipol magnetic, iar $\bar{R}$ — pentru vectorul de poziție al nucleului în raport cu originea.

Elementul de matrice pentru interacția de dipol electric:

$$\mathscr{H}'_{mn} = -\bar{\mu}^e_{mn} \bar{E} \tag{3.7}$$

Ecuațiile de mișcare pentru tranzițiile de dipol electric, între stările $|1\rangle$ și $|2\rangle$

a) Ecuația pentru polarizație

$$\ddot{\bar{P}} + \frac{2}{T_2}\dot{\bar{P}} + \Omega^2\bar{P} = \frac{2\Omega}{\hbar} L \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} N\bar{E}. \qquad (3.8)$$

b) Ecuația pentru populații

$$\dot{N} + \frac{N - N^e}{T_1} = \frac{2}{\hbar\Omega}\dot{\bar{P}}\bar{E}. \qquad (3.9)$$

c) Ecuațiile de cîmp

$$\nabla\times(\nabla\times E) + \frac{n_r\gamma}{c}\frac{\partial E}{\mathrm{d}t} + \frac{n_r^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu\frac{\partial^2\bar{P}}{\partial t^2} \quad \text{(pentru undele progresive)} \qquad (3.10)$$

$$\ddot{\bar{E}} + \frac{1}{\tau_c}\dot{\bar{E}} + \omega_c^2\bar{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\bar{E}_c(\bar{r})\int \ddot{\bar{P}}\bar{E}_c(\bar{r})\,\mathrm{d}V \quad \text{(pentru cîmpul din cavitate).} \qquad (3.11)$$

În ecuațiile de mai sus, $\bar{P}$ reprezintă acea parte din polarizația totală care ia în considerare tranzițiile de dipol care interesează, $\left(\bar{P} = \frac{n_r^2+2}{3}\bar{P}_{total}\right)$, $\bar{E}$ reprezintă cîmpul macroscopic$\left[\bar{E} = \left(\frac{n_r^2+2}{3}\right)^{-1}\bar{E}^{loc}\right]$, $L = \left(\frac{n_r^2+2}{3}\right)^2$ — factorul de corecție Lorenz, n_r — indicele de refracție al mediului, $\gamma = \frac{\mu_0\sigma_e c}{n_r}$ — coeficientul de pierderi, σ_e — conductivitatea mediului, τ_c — timpul de viață în cavitate al radiației, $\bar{E}_c$ — intensitatea cîmpului electric corespunzătoare modurilor normale de oscilație în cavitate, $N_1 - N_2 = N$ — diferența de populație pe unitatea de volum pentru nivelele între care au loc tranzițiile, iar $(N_1 - N_2)^e$ — diferența de populație la echilibru (regim staționar).

Regimul staționar pentru tranzițiile de dipol electric

Susceptivitatea electrică $\chi(\omega)$ este dată de relația

$$\chi(\omega) = \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} L \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3}(N_1 - N_2)\,\widetilde{g}_L(\omega, \Omega), \qquad (3.12)$$

ω fiind frecvenţa cîmpului care induce polarizaţia mediului, Ω — frecvenţa de tranziţie, iar $\widetilde{g}_L(\omega, \Omega)$ funcţia complexă de formă a liniei, a lui Lorentz:

$$\widetilde{g}_L(\omega, \Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\Omega - \omega) + i(1/T_2)}. \tag{3.13}$$

Coeficientul de absorbţie al mediului, definit de relaţia $I = I_0 \exp[-\Gamma z)]$, unde $I = n_r \varepsilon_0 c \frac{|\widetilde{E} \exp[-ikz]|^2}{2}$ reprezintă puterea medie pe unitatea de arie, are expresia

$$\Gamma = \frac{\Omega \pi}{\hbar \varepsilon_0 c n_r} L \frac{|\overline{\mu}_{12}^e|^2}{3} (N_1 - N_2) \, g_L(\omega, \Omega) \tag{3.14}$$

unde

$$g_L(\omega, \Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\Omega - \omega)^2 + (1/T_2)^2} = \mathrm{Im}\{g_L(\omega, \Omega)\}. \tag{3.15}$$

(Notaţia „Im" înseamnă partea imaginară a expresiei.)

Lărgirea lorentziană a liniei

$$B = 2\Delta\omega_L, \quad \left(\Delta\omega_L = \frac{2}{T_2}\right). \tag{3.16}$$

Secţiunea eficace de absorbţie este definită astfel

$$\sigma_\Gamma = \frac{\mathscr{P}_0/N_0}{I} \tag{3.17}$$

unde $\mathscr{P}_0 = \Gamma I$ reprezintă puterea absorbită pe unitatea de volum, iar N_0 — numărul total de atomi din unitatea de volum. Se mai foloseşte şi expresia

$$\sigma_\Gamma = \frac{\Omega \pi}{\hbar \varepsilon c n_r} L \frac{|\overline{\mu}_{12}^e|^2}{3} g_L(\omega, \Omega). \tag{3.18}$$

Lărgirea neomogenă a liniei, prin efect Doppler, este caracterizată de funcţia

$$g_D(\Omega_i, \omega_0) = \frac{[(4/\pi) \ln 2]^{1/2}}{\Delta\omega_D} \exp\left[-4(\ln 2) \frac{(\Omega_i - \omega_0)^2}{(\Delta\omega_D)^2}\right] \tag{3.19}$$

unde

$$\Omega_i = \omega_0\left(1 + \frac{v_i}{c}\right) \tag{3.20}$$

indicele i specificînd o anumită moleculă, iar ω_0 fiind frecvența de tranziție pentru molecula staționară.

Susceptivitatea în cazul lărgirii neomogene a liniei

$$\chi(\omega) = \frac{\pi}{\hbar\varepsilon} L \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} (N_1 - N_2) \int_{-\infty}^{+\infty} g_L(\omega, \Omega_i)\, g_D(\Omega_i, \omega_0)\, d\Omega_i. \tag{3.21}$$

Puterea medie pe unitatea de arie la saturație

$$I_{sat} = \frac{n_r \varepsilon_0 c}{(2T_1 T_2/\hbar^2)\, L(|\bar{\mu}_{12}^e|^2/3)} \tag{3.22}$$

Inversia de populație cînd fenomenele de saturație devin importante

$$(N_1 - N_2) = \frac{(N_1 - N_2)^e}{1 + \dfrac{I}{I_{sat}}\, g_L\, \dfrac{(\omega, \Omega)\,\pi}{T_2}} \tag{3.23}$$

Coeficientul de absorbție cînd fenomenele de saturație devin importante

$$\Gamma = \frac{\Omega\pi}{\hbar\varepsilon_0 c n_r} L \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} (N_1 - N_2)^e \left[\frac{1}{\pi}\, \frac{1/T_2}{(\Omega - \omega)^2 + \left(\dfrac{1}{T_2}\right)^2 (1 + I/I_{sat})}\right]. \tag{3.24}$$

Regimul tranzitoriu pentru tranzițiile de dipol electric

Ecuațiile ratelor pentru laseri, cu variabile normalizate

$$\dot{N}_{norm.} + \frac{N_{norm.} - N_{norm.}^e}{T_1} = - \frac{N_{norm.}^e - 1}{T_1} N_{norm.}\varphi_{norm.} \tag{3.25}$$

$$\dot{\varphi}_{norm.} + \frac{\varphi_{norm.}}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_c} N_{norm.}\varphi_{norm.} \tag{3.26}$$

În ecuațiile (3.25), (3.26), $N_{norm.} = \frac{N}{N^o_{norm.}}$, $\varphi_{norm.} = \frac{\varphi}{\varphi^o_{norm.}}$, unde constantele de normare $N^o_{norm.}$ și $\varphi^o_{norm.}$ sînt date de relațiile

$$\dot{N}^o_{norm.} = \frac{\hbar\varepsilon}{\Omega\tau_c T_2 L(|\bar{\mu}^e_{12}|^2/3)} \tag{3.27}$$

$$\varphi^o_{norm.} = \frac{\tau_c}{T_1}\frac{N^o_{norm.}}{2}(N^e_{norm.} - 1) \tag{3.28}$$

iar φ este proporțional cu densitatea de energie electromagnetică.

Ecuațiile ratelor pentru maseri, cu variabile normalizate

$$\dot{N}_{norm.} + \frac{N_{norm.} - N^e_{norm.}}{T_1} = -\frac{N^e_{norm.} - 1}{T_1}\varphi_{norm.} \tag{3.29}$$

$$\dot{\varphi}_{norm.} + \frac{2}{T_2}\varphi_{norm.} = \frac{2}{T_2}N_{norm.}\varphi_{norm.} \tag{3.30}$$

Ecuațiile ratelor pentru laseri în funcție de probabilitățile de tranziție

$$\dot{N} + \frac{N - N^e}{T_1} = -2WN \tag{3.31}$$

$$\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{\tau_c} = WN \tag{3.32}$$

unde $W = \left(\frac{T_2}{2}\right)\left(\frac{L(|\bar{\mu}^e_{12}|^2/3)|\widetilde{E}|^2}{\hbar^2}\right)$ reprezintă probabilitatea de tranziție pe unitatea de timp.

Condiția de prag pentru laseri:

$$N^e_{norm} > 1 \tag{3.33}$$

unde $N^e_{norm.} = N^e_{2(norm).} - N^e_{1(norm.)}$ pentru cazul nedegenerat și

$N^e_{norm.} = \frac{N^e_{2norm.}}{g_2} - \frac{N^e_{1norm.}}{g_1}$ pentru cazul degenerat.

Puterea de pompaj la prag e dată de relația

$$\mathscr{P}_p = \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\frac{N^e - N_T^e}{T_1}\right) = \frac{3\hbar^2\varepsilon}{2L|\bar{\mu}_{12}^e|^2 T_1 \tau_c T_2} \quad (3.34)$$

pentru linia lărgită omogen și de relația

$$\mathscr{P}_p = \frac{\hbar^2\varepsilon_0\Delta\omega_G}{0{,}626\,\pi\tau_c T_1|\bar{\mu}_{12}^e|^2} \quad (3.35)$$

pentru linia lărgită neomogen, unde N_T^e este diferența de populație la echilibrul termic pentru nivelele între care are loc tranziția.

Puterea de ieșire pentru oscilatorul laser este dată de relația

$$\mathscr{P}_{0\,ieș.} = \frac{\hbar\Omega}{\tau_m}\,\frac{\tau_c}{T_1}\,\frac{N_{norm.}^0}{2}\,(N_{norm.}^e - 1) \quad (3.36)$$

pentru linia lărgită omogen și de relația

$$\mathscr{P}_{0\,ieș.} = \frac{3\varepsilon_0\hbar^2}{\tau_m|\bar{\mu}_{12}^e|^2 T_1 T_2}\left[\left(\frac{N^e}{N_p^e}\right)^2 - 1\right] \quad (3.37)$$

pentru linia lărgită neomogen, unde τ_m este timpul de viață al energiei electromagnetice în cavitate determinat de transmisia oglinzilor.

Dependența diferenței de populație normalizate de densitatea de energie normalizată în cavitate pentru regimul tranzitoriu al oscilatorului laser

$$\frac{T_1}{2\tau_c(N_{norm.}^e - 1)}(N_{norm.} - 1)^2 = \ln\frac{\varphi_{norm.}}{\varphi_{i(norm)}} - (\varphi_{norm.} - \varphi_{i(norm.)}) \quad (3.38)$$

$\varphi_{i(norm.)}$ fiind densitatea de energie normalizată le momentul $t = 0$.

Dependența diferenței de populație normalizată de densitate de energie normalizată pentru regimul de Q-switch

$$\varphi_{norm.} = \frac{T_1}{\tau_c(N_{norm.}^e - 1)}\left[\ln\frac{N_{norm.}}{N_{norm.}^e} + N_{norm.}^e - N_{norm.}\right]. \quad (3.39)$$

Probabilitatea de tranziție pe unitatea de timp, rezultată din tranziții induse

$$W = \frac{\partial \bar{\rho}_{kk}}{\partial t} . \tag{3.40}$$

Probabilitatea de tranziție pe unitatea de timp, la absorbția unui singur foton

$$W_{(1)} = \frac{|\bar{\mu}^{e}_{12}|^2}{6\hbar^2} |\breve{E}|^2 \pi g_L(\omega). \tag{3.41}$$

Probabilitatea de tranziție pe unitatea de timp, pentru absorbția a m fotoni

$$W(m) = \frac{g_L(m\omega)}{2^{2m-1}\hbar^{2m}} \times$$

$$\times \left[\sum_{q_1 k \ldots sp} \frac{\widetilde{\mathscr{H}'_{jq}}\widetilde{\mathscr{H}'_{qk}} \ldots \widetilde{\mathscr{H}'_{sp}}\widetilde{\mathscr{H}'_{p1}}}{[(m-1)\omega - \omega_{q_1}][(m-2)\omega - \omega_{k_1}] \ldots [2\omega - \omega_{s_1}][\omega - \omega_{p_1}]} \right]^2 \tag{3.42}$$

unde $\widetilde{\mathscr{H}}'_{qk}$ reprezintă elementul de matrice al hamiltonianului de interacțiune între nivelele q și k.

Secțiunea eficace pentru absorbțiile multifotonice

$$\sigma_{c(m)} = \frac{2\hbar\omega_m}{n_r c \varepsilon_0 |\widetilde{E}|^2} W. \tag{3.43}$$

Intensitatea cîmpului pentru armonica a treia

$$\widetilde{E}_{3\omega} = \frac{\mu_0 (3\omega)^2 P_{3\omega}}{(3k)^2 - (3\omega n_{r3}/c)^2} \left(1 - \exp\left[\frac{i[(3k)^2 - (3\omega n_{r3}/c)^2]}{6k} z\right]\right). \tag{3.44}$$

În relația de mai sus am folosit notația

$$\widetilde{P}_{3\omega} = -\frac{i|\bar{\mu}^{e}_{12}|^4 L^2 T_2 N_0}{144\hbar^3\omega^2} (\widetilde{E}_\omega)^3 \tag{3.45}$$

$\widetilde{P}_{3\omega}$ fiind polarizarea pentru armonica a treia.

Densitatea de putere pentru armonica a treia

$$I_{3\omega} = I_0 \frac{\sin^2 \alpha z}{\alpha^2 z^2} \tag{3.46}$$

unde

$$\alpha = \frac{(3k)^2 - (3\omega n_{r3}/c)^2}{12k} \tag{3.47}$$

$$I_0 = \frac{n_{r3}\mu_0 |\bar{\mu}_{12}^e|^8 L^4 T_2^2 N_0^2}{9 \cdot 2^{11} c k^2 \hbar^6} |\widetilde{E}_\omega|^6. \tag{3.48}$$

Schimbarea de frecvență prin efect Stark este dată de relația

$$\omega \approx \Omega + \frac{\Omega |\bar{\mu}_{12}^e|^2 L}{3\hbar^2(\Omega^2 - \omega_1^2)} |\widetilde{E}_1|^2 \tag{3.49}$$

unde $\widetilde{E}_1$ este amplitudinea cîmpului care provoacă modificarea frecvenței.

Condiția de prag pentru efect Raman stimulat

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{\omega_2 \varepsilon_0}{2} \frac{N_v |\bar{\mu}_{13}^e|^2 \tau_{12} \tau_{13} \tau_{23}}{36\hbar^3} |\widetilde{E}_1|^2 \tag{3.50}$$

indicii 1, 2, 3 specificînd nivelele implicate în proces.

* * *

PROBLEME

3.1. Un laser cu rubin monomodal, lucrează în regim pulsatoriu.

1°. Să se studieze regimul tranzitoriu, care caracterizează funcționarea laserului, pornindu-se de la ecuațiile ratelor

$$\dot{N}_{norm.} + \frac{N_{norm.} - N_{norm.}^e}{T_1} = \frac{1 - N_{norm.}^e}{T_1} N_{norm.} \varphi_{norm.}$$

$$\dot{\varphi}_{norm.} + \frac{\varphi_{norm.}}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_c} N_{norm.} \varphi_{norm.}$$

arătîndu-se sensurile de variaţie a mărimilor $N_{norm.}$ şi $\varphi_{norm.}$ în timp, faţă de valorile de regim staţionar. În ecuaţiile de mai sus, $N_{norm.}$ este diferenţa de populaţie pe unitatea de volum normalizată, $\hbar\omega\varphi_{norm.}$ — densitatea de energie normalizată, τ_c — constanta de timp de relaxare a energiei electromagnetice în cavitate, iar T_1 este timpul de viaţă al stărilor excitate, atunci cînd există sursă de pompaj.

2°. Să se obţină expresia $\varphi_{norm.}$ în funcţie de $N_{norm.}$, considerînd că abaterile lui $N_{norm.}$ de la valoarea de regim staţionar sînt neglijabile. Să se discute această expresie punîndu-se în evidenţă caracterul ciclic al regimului tranzitoriu.

3°. Să se determine puterea maximă în impuls.

4°. Să se determine valorile maxime şi minime N_{max} şi N_{min}, ale diferenţei de populaţie în timpul regimului tranzitoriu şi energia totală eliberată în acest interval de timp.

5°. Introducîndu-se în rezonator o celulă Kerr se obţine regimul de funcţionare Q-switch. Să se determine în acest caz expresiile lui $\varphi_{norm.}$ în funcţie de $N_{norm.}$.

6.° Să se calculeze pentru Q-switch, puterea maximă emisă în impuls şi durata impulsului, considerînd pentru acesta o variaţie triunghiulară în timp şi presupunînd energia emisă de laser egală cu pierderile de energie în cavitate.

Se cunosc următorii parametrii ai laserului cu rubin:

— densitatea de energie emisă de laser în regim Q-switch:

$$\mathscr{E}/V = 10^5 \mathrm{J\cdot m^{-3}},$$

— constanta de normalizare pentru populaţii

$$N^0_{norm.} = \frac{3\hbar\varepsilon}{L|\overline{\mu}^e_{12}|^2\Omega\tau_c T_2} 10^{18}\ \mathrm{cm^{-3}}$$

— timpul de relaxare longitudinal, $T_1 = 4\cdot10^{-3}$ s,

— constanta de timp a cavităţii, $\tau_c = 2\cdot10^{-9}$ s,

— timpul de viaţă al energiei electromagnetice în cavitate datorită transmisiei oglinzilor $\tau_m = 2\tau_c$,

— durata pulsului, $T_p = 10^{-6}$ s,

— $\hbar\Omega = 2{,}7\cdot10^{-19}$ J

— $N^e_{norm.} = 2$

— volumul mediului activ, $V = 2$ cm^3,

— valoarea iniţială (datorită emisiei spontane) a densităţii de energie, normalizată, $\varphi_{i(norm.)} = 10^{-10}$.

3.2. Să se determine frecvența centrală a benzii de oscilație a unui oscilator laser cu rubin care funcționează în regim continuu, cunoscînd că depărtarea dintre frecvența centrală a profilului liniei și frecvența centrală a curbei de rezonanță a cavității pasive este $\omega_0 - \omega_c = 10^6 s^{-1}$. Se mai cunosc: semilărgirea liniei spectrale $\Delta\omega = \pi \cdot 10^{11}\ s^{-1}$, semilărgimea benzii rezonatorului $\Delta\omega_c = \pi \cdot 10^9\ s^{-1}$ și frecvența centrală a acesteia $\omega_c = 2{,}7 \cdot 10^{15}\ s^{-1}$.

3.3. Mediul activ al unui laser cu colorant organic este un sistem cu patru nivele energetice electronice, fiecare din ele avînd asociată o serie de nivele apropiate de vibrație și rotație. Cele patru nivele electronice sînt nivelul fundamental molecular S_0 (o stare de singlet), prima stare de singlet excitată S_1, starea de triplet cea mai coborîtă T_1 și prima stare de triplet excitată T_2, ca în figura 3.3.

Între aceste stări există doar două tranziții radiative, permise, între perechile de singleți și tripleți, iar tranziția laser este cea singlet-singlet. Cu toate acestea, nivelul de triplet T_1 are un rol important, pentru că tranziția neradiativă dintre starea de singlet excitată și cea de triplet cea mai coborîtă e permisă energetic și pentru că timpul de viață al stării de triplet e mare.

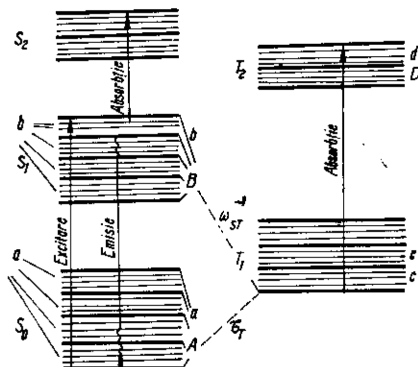


Fig. 3.3

Moleculele aflate pe starea de triplet T_1 pot fi excitate pe starea de triplet T_2 și acționează ca absorbanți rezonanți ai luminii laser emisă în tranziția singlet-singlet.

1°. Să se exprime dependența cîștigului mediu al unui laser cu mediu activ colorat organic, de lungimea de undă λ, de rata de tranziție W_{ST} dintre stările S_1 și T_1 și de rata de pierderi γ.

2°. Să se discute condiția de prag pentru efectul laser:

a) în cazul unei acordări exterioare prin pierderi γ mari,

b) în cazul unei autoacordări, cînd pierderile exterioare sînt neglijabile.

3.4. Să se deducă ecuațiile ratelor pentru populații și pentru cîmpul de radiație pornind de la ecuațiile teoriei semicuantice.

3.5. Se consideră ecuațiile

$$\ddot{\bar{P}} + \frac{2}{T_2}\dot{\bar{P}} + \Omega^2 P = -\frac{2\Omega}{\hbar} L \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} N\bar{E}$$

$$\dot{N} + \frac{N - N^e}{T_1} = \frac{2}{\hbar\Omega}\dot{\bar{P}}\bar{E}$$

$$\ddot{\bar{E}} + \frac{\dot{\bar{E}}}{\tau_c} + \omega_c^2 \bar{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\ddot{\bar{P}}$$

care descriu tranzițiile de dipol electric într-o cavitate laser.

Se presupune că polarizația care se obține datorită cîmpului din cavitate este o mărime oscilatorie, de frecvență Ω, diferită de frecvența ω_c pe care este acordată cavitatea.

1°. Să se demonstreze că rezultatul cuplării celor doi oscilatori, polarizație-cavitate, se manifestă la ieșire printr-un cîmp de frecvență ω, intermediară frecvențelor ω_c și Ω, și să se calculeze această frecvență.

2°. Să se găsească valoarea de regim staționar a diferenței de populație în acest caz.

3°. Aplicație numerică:

— frecvența de rezonanță a mediului activ $= \frac{\Omega}{2\pi} = 2{,}6 \cdot 10^{15}$ **Hz**

— frecvența de rezonanță a circuitului $\frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\Omega}{2\pi} + 100$ **MHz**

— $\tau_c = 2 \cdot 10^{-9}$ s.

— $2/T_2 = 2\pi \cdot 3{,}3 \cdot 10^{11}$ Hz.

— $N^e_{norm.} = \frac{\hbar\varepsilon}{\Omega\tau_c T_2 L|\bar{\mu}_{12}^e|^2/3} = 10^{24}\,\mathrm{m}^{-3}$.

3.6. Pentru studiul unui laser cu He—Ne, monomodal, se ia în considerare mişcarea moleculelor gazului cu viteza v_i, care duce la lărgirea neomogenă (gaussiană) a liniei prin efect Doppler, după relaţia

$$\Omega_i = \omega_0 \left(1 + \frac{v_i}{c}\right)$$

unde Ω_i este frecvenţa de tranziţie afectată de efect Doppler iar ω_0 frecvenţa de traziţie pentru molecula staţionară. Rezolvînd ecuaţiile de mişcare pentru tranziţiile de dipol, în cazul laserului cu He—Ne, se obţin relaţiile

$$(\Delta \rho) = \frac{(\Delta \rho)^e}{1 + \frac{|\widetilde{E}|^2}{|\widetilde{E}|^2_{sat}} \frac{g_L(\omega, \Omega_i)}{T_2/\pi}}$$

pentru diferenţa de populaţie între nivele $\Delta\rho = \rho_{11} - \rho_{22}$, unde

$$|\widetilde{E}|^2_{sat} = \frac{3\hbar^2}{|\overline{\mu}^e_{12}|^2 T_1 T_2}$$

şi

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{0{,}939\, \pi N_0}{\varepsilon \Delta\omega_D} \frac{k(\Delta\rho)^e}{\sqrt{1 + |\widetilde{E}|^2/|\widetilde{E}|^2_{sat}}}$$

pentru timpul de viaţă al radiaţiei în cavitate, unde $k = \frac{|\mu^e_{12}|\Omega_i}{3\hbar}$.

În relaţiile de mai sus $|\overline{\mu}^e_{12}|$ este elementul de matrice pentru momentul de dipol electric, T_1, T_2 timpii de viaţă spin-reţea, respectiv spin-spin, $(\Delta\rho)^e$ valoarea de echilibru a lui $\Delta\rho$, $\Delta\omega_D$ lărgimea gausiană a liniei spectrale, iar $\widetilde{E}$ reprezintă amplitudinea complexă a cîmpului din cavitate

$$\widetilde{E} = \frac{1}{2}\widetilde{E}\exp[i\omega t] + \left(\frac{1}{2}\widetilde{E}\exp[i\omega t]\right)^* .$$

Se cunosc următorii parametri, pentru laserul cu He-Ne:

$\omega = 3 \cdot 10^{15}$ rad/s, $\Delta\omega_D = 5 \cdot 10^9$ rad/s, $T_1 = 10^{-7}$ s, $\tau_c = 10^{-7}$ s, $\tau_m = 10^{-7}$ s, $T_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ s, $V = 10^{-4}$ m^3, $N^e = 1{,}4\ N^e_{prag}$, $|\mu^e_{12}| = 1{,}4$ debye, $\frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}} = 0{,}25$ (reprezintă pierderile de putere din puterea totală la o trecere a radiaţiei prin cavitate), $T_t = 10^{-9}$ s (timpul de tranzit prin cavitate).

a) Să se arate că profilul gaussian al liniei atomice prezintă două puncte de minim datorită depopulării selective (hole burning) simetrice față de ω_0.

b) În ce caz există un singur punct de minim datorită depopulării selective?

c) Să se calculeze lărgimea de bandă a profilului gaussian și a adînciturii create în punctele de depopulare selectivă $\Delta\omega_M$.

2°. Să se găsească puterea de excitație necesară pentru a menține inversia de populație la nivelul corespunzător pragului.

3°. Să se calculeze puterea de ieșire în funcție de parametrii laserului.

4°. Să se găsească lărgimea de bandă a cavității $\Delta\omega_c$ și să se compare cu cea a liniei $\Delta\omega_D$.

3.7. Elementele de matrice ale operatorului densitate pentru un sistem a cărui hamiltoniană este $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \lambda\mathscr{H}'$, unde $\mathscr{H}_0$ reprezintă hamiltoniana mediului neperturbat și $\mathscr{H}'$ perturbația, sînt date de o serie de puteri în care intervin perturbațiile de diferite ordine

$$\rho_{ij} = \sum_p \lambda^p \rho_{ij}^{(p)}$$

unde ρ_{ij} verifică ecuațiile:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{jj}^{(p)}}{dt} = [\mathscr{H}', \rho^{(p-1)}]_{jj}$$

$$i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{ij} + \frac{1}{\tau_{ij}}\right]\rho_{ij}^{(p)} = [\mathscr{H}, \rho^{(p-1)}]_{ij} \qquad i \neq j$$

p fiind ordinul perturbației.

Se consideră o excitație sinusoidală de forma:

$$\mathscr{H}' = \frac{\tilde{\mathscr{H}}'}{2} (\exp[i\omega t] + \exp[-i\omega t]).$$

1°. Să se calculeze probabilitatea de tranziție în starea $|k\rangle$

$$W = \frac{d\bar{\rho}_{kk}}{dt}$$

pentru absorbția unui singur foton, considerînd sistemul în starea $|1\rangle$ la momentul $t = 0$, medierea făcîndu-se pe o perioadă lungă în comparație cu perioada excitației armonice.

2°. Să se arate că definiția lui W conduce la o limită superioară a intensității radiației incidente, pentru o frecvență de tranziție dată, și un anumit moment de dipol.

3°. Să se găsească lărgimea de bandă B, pentru profilul lorentzian al liniei.

4°. Să se exprime ecuația ratelor pentru populații

$$\dot{N} + \frac{N - N^e}{T_1} = -\frac{T_2}{\hbar^2}\frac{|\overline{\mu}^e_{12}|^2}{3}N|\widetilde{E}|^2$$

în funcție de probabilitatea de tranziție știind că aceasta a fost dedusă în ipoteza tranzițiilor de dipol electric.

5°. Aplicație numerică.

Determinarea lui $W(1)$ și a benzii B, știindu-se :

— elementul de matrice, $|\overline{\mu}^e_{ij}| = 1$ debye

— funcția de formă a liniei la rezonanță :

$$g_L(\omega)_{rez} = 10^{-12}\ \text{s};$$

1 debye $= 3{,}33 \cdot 10^{-30}$ C·m

3.8. În multe experiențe de fizică, relația care există între două mărimi fizice nu este liniară decît în primă aproximație. Astfel, în optică, între polarizația P a unui cristal și intensitatea cîmpului electric există relația

$$P = \chi E(1 + a_1E + a_2E^2 + \ldots),$$

unde χ este susceptibilitatea și $a_1, a_2, \ldots$ sînt constante a căror mărime este de ordinul inversului intensității cîmpului atomic în cristal.

1°. Să se arate că dacă vom considera primii doi termeni din relația de mai sus, cînd cristalul este supus la un cîmp electric de intensitate

$$E = E_0 \sin \omega t$$

se obține la ieșirea din cristal, în afara unei radiații de frecvență ω și o radiație de frecvență 2ω, numită armonica a doua.

2°. Să se calculeze intensitatea cîmpului electric al armonicii a doua la ieșirea din cristal, considerînd că lama cristalină cu fețe paralele are grosimea egală cu d. De asemenea, se cere să se calculeze intensitatea radiației armonicii a doua și să se reprezinte grafic funcție de $\frac{\omega d}{c}(n_2 - n_1)$. n_1 și n_2 sînt indicii de refracție ai cristalului corespunzători respectiv primei și celei de-a doua armonici.

3°. Să se explice calitativ metoda utilizată pentru a crește intensitatea radiației armonicii a doua la ieșirea dintr-un cristal.

3.9. Un cristal uniax negativ are următoarele valori ale indicelui de refracţie pentru o direcţie perpendiculară pe axa optică :

— pentru frecvenţa ω_1 a undei incidente

$$n_{ro1} = 1{,}550, \quad n_{re1} = 1{,}542$$

— pentru frecvenţa armonicii a 2-a, $\omega_2 = 2\omega_1$,

$$n_{ro2} = 1{,}558, \quad n_{re2} = 1{,}548$$

unde indicele o se referă la raza ordinară iar indicele e la raza extraordinară.

Să se determine unghiul faţă de axa optică, după care trebuie să se propage radiaţia de frecvenţă ω_1 pentru a avea conversia optimă în radiaţie de frecvenţă $\omega_2 = 2\omega_1$.

3.10. Într-o experienţă de iradiere a unei ţinte de aur cu un fascicul luminos emis de un laser cu rubin în impulsuri, s-a pus în evidenţă un efect fotoelectric multiplu.

1°. Să se calculeze ordinul efectului fotoelectric multiplu.

2°. Să se calculeze valorile critice ale duratei impulsului $T_{p,cr}$, şi intensităţii pulsului, I_{cr}, la care efectul fotoelectric multiplu devine dominant faţă de cel termoelectronic :

Se cunosc :

— coeficientul de reflexie $r = 0{,}9$

— energia de extracţie a aurului $\mathscr{E}_{ex} = 4{,}8\ eV = 7{,}38 \cdot 10^{-19}$ J

— conductibilitatea termică a aurului

$$\sigma_t = 2{,}92 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} \cdot grd^{-1}}.$$

— coeficientul de difuzie termică al aurului

$$D_t = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}.$$

— energia fotonului emis de laserul cu rubin

$$\mathscr{E} = \hbar\omega = 1{,}78\ \mathrm{eV} = 2{,}84 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

— raportul dintre numărul de electroni ce provin din efectul termoelectronic şi numărul celor ce provin din efectul multifotonic $\beta = 10^{-2}$

— densitatea de sarcină de prag dată de sensibilitatea detectorului de sarcini electrice $q_{prag} = 10^{-20}\ \mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

3.11. Se dă expresia generală a probabilităţii pentru absorbţia a n fotoni, între nivelele $|1\rangle$ şi $|j\rangle$

$$W_{(n)} = \frac{\pi g_L(n\omega)}{2^{2n-1}\hbar^{2n}} \cdot \left| \sum_{q,k,\ldots,s,p} \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'_{jq}\widetilde{\mathscr{H}}'_{qk} \ldots \widetilde{\mathscr{H}}'_{sp}\widetilde{\mathscr{H}}'_{p1}}{[(n-1)\omega - \omega_{q1}][(n-2)\omega - \omega_{k1}] \ldots [2\omega - \omega_{s1}][\omega - \omega_{p1}]} \right|^2$$

1°. Să se particularizeze această expresie pentru absorbţia a doi fotoni şi trei fotoni, dîndu-se expresiile pentru $W_{(2)}$ şi $W_{(3)}$.

2°. Să se arate că tranziţiile bifotonice pot avea loc numai între stări de aceeaşi paritate dacă intervin numai interacţiuni de dipol electric.

3°. Să se explice în ce caz pot avea loc procese de absorbţie a doi fotoni între stări de parităţi opuse. Exemplu.

4°. Să se arate că în cazul stărilor de paritate mixtă, poate avea loc absorbţia a doi fotoni, prin tranziţii de dipol electric, care să implice numai două niveluri energetice.

5°. Să se studieze paritatea stărilor pentru procesele de absorbţie a trei fotoni.

6°. Definind secţiunea eficace de împrăştiere pentru absorbţia multifotonică prin relaţia $\sigma_c = \frac{\mathscr{P}_0}{N_0 I}$, unde $\mathscr{P}_0$ este puterea medie absorbită pe unitatea de volum, N_0 numărul de molecule pe unitatea de volum şi I puterea medie a radiaţiei incidente pe unitatea de suprafaţă, să se calculeze σ_c pentru absorbţia a unu, doi şi trei fotoni, alegîndu-se convenabil numărul de nivele între care are loc tranziţia :

7°. Aplicaţie numerică : elementul de matrice $|\overline{\mu}^e_{ij}| = 1$ debye, indicele de refracţie $n_r = 1$, maximul funcţiei de formă a liniei $g_L(n\omega) = 10^{-12}$ s frecvenţa radiaţiei incidente $\omega = 10^{16}$ rad/s, frecvenţa de tranziţie $\omega_{21} = n\omega$ pentru un proces cu n fotoni şi $\omega_{31} = 2\,\omega_{21}$, — în cazul absorbţiei a doi fotoni.

Se dă : 1 debye $= 3{,}33 \cdot 10^{-30}$ C·m $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ F/m.

3.12. Caracterizarea mediilor anizotrope cu ajutorul tensorului susceptibilitate electrică, permite clasificarea acestora după proprietăţile lor optice în : izotrope, uniaxe, biaxe.

1°. Să se arate că dacă A este matricea transformării pentru o rotaţie a coordonatelor, condiţia ca A să corespundă unei operaţii de simetrie este

$$[A, \chi] = 0$$

[unde χ este tensorul susceptibilitate].

2°. Să se găsească tensorul χ şi matricea transformării pentru un cristal care posedă o simetrie de rotaţie de $\pi/2$ în jurul axei z. Să se arate că un astfel de cristal se comportă uniax.

3.13. În cristalele ionice fononii optici transversali şi fotonii ce au energiile şi vectorii de undă aproximativ aceiaşi, interacţionează puternic între ei, apărînd în cristal, ca retzultat, o stare de perturbaţie

care nu mai poate fi descrisă nici ca foton nici ca fonon şi apare ca un amestec al lor. O astfel de stare a căpătat numele de polariton.

Să se demonstreze că împrăştierea radiaţiei laser pe polariton poate fi folosită pentru construirea unor laseri acordabili.

3.14. Se consideră un laser cu rubin, cu volumul de 1 cm^3, al cărui rezonator cu oglinzi de reflectivitate r are lungimea l. Sursa de pompaj este suficient de puternică astfel încît să creeze o diferenţă de populaţie care să depăşească cu p % condiţia de prag. Se admite că pierderile din cavitate sînt egale cu cele prin transmisie. Se cunosc:

N_{0i} — numărul de ioni activi pe unitatea de volum

T_1 — timpul de relaxare longitudinal

Ω — frecvenţa de tranziţie

τ_c — timpul de viaţă al fotonilor în cavitate.

1°. Să se normeze ecuaţiile ratelor

$$\dot{N} + \frac{N - N^e}{T_1} = -2\frac{\Omega T_2}{h\varepsilon} L \frac{|\bar{\mu}_{12}|^2}{3} N\varphi$$

$$\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{\tau_c} = \frac{\Omega T_2}{h\varepsilon} L \frac{|\bar{\mu}_{12}|^2}{3} N\varphi$$

introducîndu-se variabilele $N_{norm.} = \dfrac{N}{N^0_{norm}}$, $\varphi_{norm.} = \dfrac{\varphi}{\varphi^0_{norm}}$, unde N_0 şi φ_0 reprezintă valorile variabilelor în regim staţionar.

2°. Să se stabiliească condiţia de prag

$$N^e_{norm} > 1.$$

3°. Să se găsească puterea de pompaj pentru laserul cu rubin cu parametrii daţi în problemă, ştiindu-se $N^0_{norm.}$ şi $N^e_T = -N_{0i}$, N^e_T fiind diferenţa de populaţie la echilibru termic, astfel încît să fie îndeplinită condiţia de oscilaţie:

4°. Să se găsească expresia timpului de relaxare transversal T_2, dacă factorul de corecţie este $L = \left[\dfrac{(n_r + 2)}{3}\right]^2$, unde n_r este indicele de refracţie.

5°. Să se calculeze lungimea cavităţii laser, cunoscînd coeficientul r de reflexie pentru oglinzi.

6°. Să se deducă expresia puterii de ieşire pe unitatea de volum, $\mathcal{P}_{0\,ies}$.

4. TEORIA CUANTICĂ A LASERILOR

Teoria cuantică a laserilor presupune cuantificarea atît a radiației cît și a mediului activ. Ea este singura care explică lărgirea liniei radiației laser statisticile fotonilor și care dă funcțiile de corelație pentru fluctuațiile de fază și intensitate.

Pornind de la ecuațiile electrodinamicii cuantice și incorporînd efectele „termostatelor" externe, cum sînt pompajul, vibrațiile rețelei, emisia spontană, se deduc ecuațiile cuantice laser [11, 8, 14, 15].

Scriind hamiltonianul total și folosind reprezentarea Heisenberg, se ajunge la ecuațiile laser Langevin pentru cîmp și atomi, iar folosind reprezentarea de interacție se ajunge la ecuația matricei densitate pentru cîmp și atomi, de unde trecînd la reprezentarea Schrödinger se obține ecuația Fokker-Planck pentru cîmp și atomi.

Ecuațiile laser Langevin pentru cîmp și atomi sînt:

Ecuațiile de cîmp

$$\frac{db_\lambda^+}{dt} = (i\omega_{c_\lambda} - k_\lambda)\, b_\lambda^+ + i \sum_{jl\mu} g_{jl\mu\lambda} (a_j^+ a_l^-)_\mu + F_\lambda^+(t) \tag{4.1}$$

unde b_λ^+ este operatorul de creare al modului λ al cavității, $\omega_{c\lambda}$ frecvența sa, $t_\lambda = \frac{1}{2}\, k_\lambda$ timpul său de viață (ambele în cavitatea pasivă), $a_{j\mu}^+$ operatorul de creare al unui electron pe nivelul j al atomului μ (μ este poziția din rețea), iar $a_{l\mu}^-$ operatorul de anihilare, $g_{jl\mu\lambda}$ descrie cuplajul modului λ cu electronul din atomul μ, care produce o tranziție reală sau virtuală între nivelele l și j, iar $F_\lambda(t)$ sînt forțele de fluctuație care exprimă caracterul întîmplător al acțiunii termostatelor asupra operatorului de creare al cîmpului, b_λ^+.

Forțele de fluctuație $F_\lambda(t)$ au proprietățile

$$\langle F_\lambda(t)\, F_{\lambda'}(t')\rangle = 2k_\lambda n_\lambda(T)\ \delta(t-t')\ \delta_{\lambda\lambda'} \tag{4.2a}$$

$$\langle F_\lambda(t) F_{\lambda'}^+(t')\rangle = 2k_\lambda[n_\lambda(T) + 1]\ \delta(t-t')\ \delta_{\lambda\lambda'} \tag{4.2b}$$

$$\langle F_\lambda F_{\lambda'}\rangle = \langle F_\lambda^+ F_{\lambda'}^+\rangle = \langle F_\lambda\rangle = \langle F_{\lambda'}^+\rangle = 0 \tag{4.2c}$$

$$\frac{d}{dt}(a_j^+ a_l^-)\mu = \Omega_{jl\mu}(a_j^+ a_l^-)\mu + i\sum_{jl\lambda} g_{jl\mu\lambda}(b_\lambda^+ + b_\lambda^-)\times$$

$$\times\{(a_j^+ a_l^-)_\mu \delta_{jl'} - (a_j^+ a_{l'}^-)_\mu \delta_{j'l}\} -$$

$$- \gamma_{jl}(a_j^+ a_l^-)_\mu (1 - \delta_{jl}) + \delta_{jl}\left\{\sum_k w_{kj}(a_k^+ a_k^-)_\mu - \right.$$

$$\left. - (a_j^+ a_j^-)_\mu w_{jk}\right\} + \Gamma_{jl\mu}(t) \qquad (4.3)$$

unde

$$\Omega_{jl\mu} = \frac{1}{\hbar}(\mathscr{E}_j - \mathscr{E}_l)_\mu . \qquad (4.4)$$

$\mathscr{E}_j$ este energia unui electron de pe nivelul j din atomul μ (lărgirea neomogenă este pusă în evidență prin dependența explicită a lui $\mathscr{E}$ de μ), δ_{ij} este simbolul lui Kroenecker, Γ sînt forțele de corelație presupuse necorelate pentru μ-uri diferite.

Efectuînd o liniarizare algebrică și o cuasiliniarizare cuantică aecuațiilor laser Langevin pentru cîmp și atomi, se obțin funcțiile de corelație pentru fluctuațiile de fază și amplitudine, care pot fi verificate experimental.

La același rezultat se ajunge dacă se operează o eliminare adiabatică a variabilelor atomice sau o eliminare exactă a variabilelor atomice din ecuațiile laser Langevin pentru cîmp și atomi ajungîndu-se la ecuațiile Langevin doar pentru cîmp și de aici printr-o liniarizare algebrică și o cuasiliniarizare cuantică, la funcțiile de corelație pentru fluctuațiile de fază și amplitudine.

Ecuația matricei densitate pentru cîmp și atomi

Ecuația generală conține o sumă de termeni care descriu cîmpul și atomii

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\mathscr{H}_c, \rho] + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{cîmp} + \sum_\mu \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{atom} \qquad (4.5)$$

unde ρ este matricea densitate, $\mathscr{H}_e$ hamiltonianul de interacție dintre cîmp și termostate și dintre electronii din atomi și termostate. Termenul pentru cîmp este dat de expresia

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{cimp} = A\,([b^+\rho, b^-]+[b^+, \rho b^-]) + A'([b^-\rho, b^+]+[b^-, \rho b^+]) \quad (4.6)$$

unde A și A' conțin funcțiile de corelație pentru variabilele termostatelor, iar termenul pentru atomi este dat de expresia

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{atom} = \frac{w_{jk}}{2}\{[a_k^+ a_j^-, \rho a_j^+ a_k^-] + [a_k^+ a_j^- \rho, a_j^+ a_k^-] +$$

$$+ \frac{w_{kj}}{2}\{[a_j^+ a_k^-, \rho a_k^+ a_j^-] + [a_j^+ a_k^- \rho, a_k^+ a_j^-]\}, \quad (4.7)$$

w_{jk} și w_{kj} fiind ratele de tranziție între nivelele k și j.

Ecuația laser Fokker-Planck

Înlocuind matricea densitate cu funcția de distribuție Wigner, W, [1, 3], se ajunge la ecuația laser Fokker-Planck, corespunzătoare ecuației clasice Van der Pol.

În aproximația undei rotitoare, amplitudinea u (care corespunde operatorului b^+) se scrie în coordonate polare sub forma $u = r$ exp $[-i\varphi]$ și ecuația laser Fokker-Planck se scrie :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{4K^2T_p}{rN_{pr}}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\left[\left(\frac{N_i - N_{pr}}{4KT_p}\right)^2 - r^2\right] r^2 W\right\} =$$

$$= \left[\frac{1}{4T}\int_0^T\int_0^T \langle F(t_1)F^*(t_2)\rangle\, dt_1\, dt_2\right]\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right] \quad (4.8)$$

unde N_i este inversia de populație totală inițială, N_{pr} inversia de populație totală la prag, T_p timpul de relaxare pentru inversia de populație în prezența pompajului și a proceselor de relaxare incoerente.

Pornind de la ecuația matricei densitate pentru cîmp și atomi, și cu ajutorul reprezentării numerelor fotonilor sau a reprezentării stă-

rilor coerente se ajunge la ecuaţia matricei densitate pentru cîmp, de unde folosind o soluţie aproximativă, se obţin funcţiile de corelaţie pentru fluctuaţiile fazei şi amplitudinii.

De asemenea, pornind de la ecuaţia matricei densitate pentru cîmp şi atomi şi cu ajutorul funcţiei de distribuţie generalizată se ajunge la ecuaţia Fokker-Planck generalizată pentru cîmp şi atomi, de unde, neglijînd derivatele de ordin superior şi operînd o eliminare adiabatică a variabilelor atomice, se ajunge la ecuaţia Fokker-Planck pentru cîmp, care duce la soluţii numerice pentru distribuţia fotonilor şi corelaţiile de ordin superior.

*
* *

PROBLEME

4.1. Se consideră un sistem compus din $\mathcal{N}$ atomi sau molecule care se găsesc într-un rezonator cu un singur mod de oscilaţie pe frecvenţa de rezonanţă $\omega_0 \approx \Omega$. Se admite că atomii sau moleculele posedă o pereche de stări energetice nedegenerate, de parităţi opuse, $|u_1>$ şi $|u_2>$ separate în energie prin $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 = \hbar\Omega$ şi cuplate prin tranziţii de dipol electric.

1. Să se găsească expresia hamiltonianului sistemului, considerînd interacţia dintre cîmpul de radiaţie şi sistemul atomic (molecular) cu două nivele în ipoteza în care şi cîmpul şi substanţa sînt cuantificate.

2°. Să se calculeze elementele de matrice pentru $\mathscr{H}' = -\bar{\mu}\bar{E}$, unde $\mathscr{H}'$ este termenul de interacţie al hamiltonianului, ţinîndu-se seama de expresiile elementelor de matrice ale operatorilor de creare şi anihilare

$$b^-_{mn} = \sqrt{n}\,\delta_{m,\,n-1}$$

$$b^+_{mn} = \sqrt{n+1}\,\delta_{m,\,n+1}$$

şi de operatorul cîmp electric din cavitate

$$\bar{E} = -i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}\right)^{1/2}\bar{E}_0(\bar{r})\,(b^+ - b^-),$$

pentru un singur mod normal al cavităţii.

3°. Pornindu-se de la ecuaţiile de mişcare ale elementelor matricei densitate

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial t} = \hbar\omega \rho_{ij} + [\mathscr{H}', \rho]_{ij} - \frac{i\hbar}{\tau_{ij}} \rho_{ij}$$

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{jj}}{\partial t} = [\mathscr{H}', \rho]_{jj} + \frac{i\hbar}{T_1} (\rho_{jj}^{e} - \rho_{jj})$$

să se generalizeze aceste ecuaţii pentru cazul în care atît cîmpul cît şi substanţa sînt cuantificate.

4°. Să se deducă ecuaţiile cuantice ale ratelor, în funcţie de numărul total de molecule (atomi) din cavitate.

4.2. În teoria cuantică a cîmpului se definesc operatorii de creare şi anihilare $b^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \cdot q - ip)$ şi respectiv $b^- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \cdot q + ip)$, unde q şi p sînt coeficienţii dezvoltării cîmpului electric şi magnetic dintr-o cavitate închisă, cu pereţii perfect conductori, fără sarcini şi curenţi, în funcţie de modurile normale de oscilaţie, după expresiile :

$$\bar{E} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_b p_b(t)\, \bar{E}_b(\bar{r}),\ \bar{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_b \omega_b q_b(t)\, \bar{H}_b(\bar{r})$$

μ fiind permeabilitatea magnetică a mediului, ε permitivitatea electrică, iar $\bar{H}_b$ şi $\bar{E}_b$ sisteme de funcţii ortonormale.

1°. Identificînd pe q şi p cu coordonatele şi respectiv impulsurile generalizate şi ţinînd seama de relaţia cuantică $[q, p] = i\hbar$, să se demonstreze relaţia de comutare $[b^-, b^+] = 1$.

2°. Să se exprime hamiltonianul cîmpului pentru un singur mod de oscilaţie, şi cîmpurile electric şi magnetic în funcţie de operatorii b^- şi b^+.

3°. Să se rezolve ecuaţia cu valori şi funcţii proprii $\mathscr{H} | n > = \mathscr{E}_n | n >$ unde $| n >$ reprezintă stările cîmpului din cavitate.

4°. Să se arate că operatorul $b^+ b^-$ corespunde unui număr de n fotoni pe mod.

5°. Să se găsească valoarea medie a lui n pentru un amestec de stări.

6°. Să se demonstreze că matricele b^- şi b^+ n-au elemente diagonale.

4.3. Se consideră ecuaţiile care descriu interacţiunea dintre cîmpul unei cavităţi şi tranziţiile de dipol electric, pentru un singur

mod al cavității, deduse cu ajutorul cuantificării atît a substanței cît și a cîmpului (probl. 4.1.).

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\rangle + \frac{\langle n\rangle - \langle n\rangle^e}{\tau_c} = K(\langle n\rangle + 1)\, Nt_2 - K\langle n\rangle\, Nt_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(Nt_1 - Nt_2) + \frac{(Nt_1 - Nt_2) - (Nt_1 - Nt_2)^e}{T_1} = 2K(\langle n\rangle + 1)Nt_2 - 2K\langle n\rangle Nt_1$$

unde constanta de cuplaj K are expresia

$$K = \frac{\pi\omega}{\hbar\varepsilon}\,\frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3}\,g_L(\omega, \Omega)\,\frac{1}{V_c}\,.$$

1°. Să se deducă coeficienții lui Einstein A_{12}, B_{12}, B_{21}, în cazul în care sistemul molecular sau atomic, interacționează cu radiația electromagnetică de spectru continuu.

2°. Să se deducă distribuția spectrală a radiației corpului negru (formula lui Planck).

3°. Să se găsească coeficienții lui Einstein, folosind rezultatele teoriei semicuantice.

Se cunosc :

— densitatea de moduri, $p(\omega)\, d\omega = \frac{8\pi\omega^2 n_r^2}{c^3}\, d\omega$

— energia absorbită pe secundă de un oscilator atomic în echilibru cu radiația corpului negru : $S = \frac{2\pi e^2}{3m}\, u_\omega$

— tăria oscilatorului $f_{ns} = \frac{m}{\hbar}\, 2\omega_{ns}\,|x_{ns}|^2$, care caracterizează contribuția diferiților oscilatori atomici, de frecvență ω_{ns} la procesul de dispersie.

— constanta de atenuare a radiației $\gamma_{rad} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2\omega^2}{mc^3}$

4.4. Cîștigul dat de emisia stimulată a radiației într-un mod electromagnetic ce se propagă paralel cu direcția de mișcare a unui electron relativist printr-un cîmp magnetic transversal, constant în timp și spațial variabil, are valori finite în domeniul lungimilor de undă de la infraroșul îndepărtat pînă în ultraviolet, sugerînd posibilitatea construirii unor oscilatori și amplificatori cuantici de radiație, acordabili în mod continuu.

Să se verifice acest lucru, calculînd cîştigul net şi cîştigul total pentru valorile vitezelor electronilor exprimate prin $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, lungimile de undă ale fotonilor λ şi intensităţile curenţilor I, care dau fasciculul de electroni din tabel:

γ	$\lambda(10^{-10}\text{m})$	$I(A)$
10	5.10^5	5.10^{-3}
10^2	5.10^3	0,5
10^3	50	1
$7,10^3$	0,85	1

Se mai cunosc:
— lungimea totală a cîmpului magnetic $l = 10$ m
— perioada cîmpului magnetic $\lambda_q = 10^{-2}$ m
— valoarea maximă a cîmpului magnetic $B_0 = 0,5$ T
— secţiunea fasciculului electronic $S = 10^{-6}$ m²

4.5. Să se arate că supraradianţa poate fi privită din punct de vedere fizic ca un fenomen care duce la emisia de radiaţie a cărei intensitate este proporţională cu pătratul numărului de atomi care iau parte la proces.

4.6. Coerenţa radiaţiilor duce la efecte fizice deosebite în cazul propagării unui puls laser într-un mediu activ sau pasiv. Unul dintre aceste efecte este ecoul fotonic. Să se arate că ecoul fotonic se manifestă printr-un proces supraradiant, intensitatea ecoului fiind proporţională cu pătratul numărului de atomi, N, din mediu.

5. PROPRIETĂȚILE RADIAȚIEI LASER

Coerența

Laserul ne pune la dispoziție un nou tip de sursă de lumină a cărei proprietate principală este coerența. Coerența radiației laser poate fi studiată atît cu metodele clasice, cît și cu metodele electrodinamicii cuantice.

Fie $U(\bar{r}, t)$ o funcție care reprezintă radiația luminoasă într-un punct de vector de poziție $\bar{r}$, la momentul t. Pentru simplitate, se presupune că U este o funcție scalară cum ar fi, de exemplu, o componentă cartesiană a vectorului cîmp electric (real) al cîmpului de radiație. Cu toate că U este o funcție reală, pentru descrierea fenomenelor de coerență se folosește în locul ei semnalul analitic complex asociat. Semnalul analitic asociat cu o funcție reală $U(\bar{r},t)$ se definește în felul următor [16] : se dezvoltă U într-o integrală Fourier reală

$$U(\bar{r}, t) = \int_0^\infty a(\omega, r) \cos[\varphi(\omega) - 2\pi\omega t]\, d\omega \tag{5.1}$$

și se înlocuiește funcția cosinus de sub integrală printr-o funcție exponențială, obținîndu-se

$$\widetilde{V}(r, t) = \int_0^\infty a(\omega, r) \exp[i\{\varphi(\omega) - 2\pi\omega t\}]\, d\omega \tag{5.2}$$

Funcția $\widetilde{V}$ este semnalul analitic complex asociat cu funcția reală $U(t)$.

Coerența temporală în punctul de vector de poziție $\bar{r}_1$ se exprimă cantitativ prin funcția de autocorelație

$$\Gamma_{11}(\bar{r}_1, t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \widetilde{V}_1(r_1, t+\tau) \widetilde{V}_1^*(\bar{r}_1, t)\, dt \tag{5.3}$$

în care $\widetilde{V}_1(\bar{r}_1, t)$ este semnalul analitic asociat cu cîmpul de radiație la momentul t. Timpul de corelație este definit ca fiind timpul τ

după trecerea căruia funcţia de autocorelaţie scade la o valoare oarecare dinainte stabilită.

Gradul de coerenţă al radiaţiei raportat la două puncte diferite din spaţiu la acelaşi moment se exprimă cantitativ prin funcţia de corelaţie transversală

$$\Gamma_{12}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \widetilde{V}_1(\bar{r}_1, t)\ \widetilde{V}_2^*(\bar{r}_2, t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4}$$

Corelaţia transversală poate fi calculată pentru fiecare pereche $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ şi deci se poate defini o arie de corelaţie, ca fiind aria în afara căreia corelaţia transversală între două puncte este mai mică decît o valoare stabilită anterior. Notăm că dacă $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$ şi $\tau = 0$, $\Gamma_{12} = \Gamma_{11}(\bar{r}_1, 0)$ şi pînă la o constantă arbitrară putem scrie

$$\Gamma_{11}(\bar{r}_1, 0) = I(\bar{r}_1) \text{ şi } \Gamma_{22}(\bar{r}_2, 0) = I(\bar{r}_2) \tag{5.5}$$

unde $I(\bar{r}_i)$ este intensitatea cîmpului în punctul $\bar{r}_i$.

Un studiu combinat al celor două concepte de coerenţă spaţială şi temporală se poate face cu ajutorul funcţiei de coerenţă mutuală definită astfel [19].

$$\Gamma_{12}(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \widetilde{V}_1(\bar{r}_1, t+\tau)\,\widetilde{V}_2^*(\bar{r}_2, t)\,\mathrm{d}t = \langle \widetilde{V}_1(\bar{r}_1, t+\tau)\ \widetilde{V}_2^*(\bar{r}_2, t)\rangle. \tag{5.6}$$

Această funcţie exprimă gradul dependenţei liniare între două cîmpuri în două puncte $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ separate printr-un interval de timp τ, necesar luminii să parcurgă drumul dintre ele.

Se obişnuieşte să se folosească funcţia normalizată definită prin relaţia

$$\tilde{\gamma}_{12}(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma_{12}(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\bar{r}, 0)}\ \sqrt{\Gamma_{22}(r_2, 0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\bar{r}, \bar{r}_2, \tau)}{\sqrt{I(\bar{r}_1)\ I(\bar{r}_2)}}. \tag{5.7}$$

Această funcţie, $\tilde{\gamma}_{12}$ exprimă gradul de coerenţă şi satisface relaţia

$$0 \leqslant |\tilde{\gamma}_{12}| \leqslant 1$$

Valorile extreme $|\gamma| = 0$ şi $|\gamma| = 1$ reprezintă incoerenţă şi respectiv coerenţă totală a cîmpului de radiaţie studiat.

Legătura între gradul de coerenţă şi contrastul franjelor de interferenţă, obţinute cu un dispozitiv experimental oarecare, este dată de vizibilitatea franjelor, definită prin relaţia

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1(\bar{r})}\sqrt{I_2(\bar{r})}}{I_1(\bar{r}) + I_2(\bar{r})} \cdot |\gamma_{12}(\tau)| \qquad (5.8)$$

în care I_{max} şi I_{min} se referă la intensitatea maximelor şi minimelor vecine din imaginea de interferenţă, iar $I_1(\bar{r})$ şi $I_2(\bar{r})$ sînt intensităţile radiaţiei luminoase în punctul $P(\bar{r})$ care sosesc de la sursa 1 situată în punctul $P(\vec{r}_1)$ şi respectiv sursa 2 situată în punctul $P(\vec{r}_2)$.

Observăm că dacă $I_1(\bar{r}) = I_2(\bar{r})$ avem $V = |\gamma_{12}|$ şi prin urmare o măsurare a vizibilităţii franjelor este de fapt o măsurare directă a gradului de coerenţă.

Monocromaticitatea

Noţiunea de monocromaticitate a unei radiaţii luminoase, se exprimă cantitativ prin relaţiile care dau semilărgimea $\Delta\omega$ şi dependenţa intensităţii de frecvenţă, $I(\omega)$. De exemplu, o linie spectrală care este determinată de procesele fizice care limitează timpul de viaţă al stărilor excitate are o formă lorentziană

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Delta\omega_N}{(\omega - \omega_0)^2 - \Delta\omega_N^2} \qquad (5.9)$$

unde $\Delta\omega_N$ este semilărgimea liniei la jumătatea maximului de intensitate, care este legată de timpul de viaţă al stării excitate, τ, printr-o relaţie de forma $\Delta\omega_N \approx \frac{1}{\tau}$.

Pe de altă parte, există linii spectrale care au o formă gaussiană, care rezultă din diverse mecanisme care creează o distribuţie corespunzătoare a frecvenţelor atomice. Un exemplu de astfel de mecanism este efectul Doppler.

În acest caz forma gaussiană a liniei este reprezentată printr-o ecuaţie de forma

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\ln 2}}{\Delta\omega_D} \exp\left\{ -\left[\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_D} \cdot \sqrt{\ln 2} \right]^2 \right\} \qquad (5.10)$$

iar semilărgimea liniei la jumătatea maximului de intensitate, $\Delta\omega_D$, este dată de relația

$$\Delta\omega_D = \frac{\omega_0}{c}\left(\frac{2kT}{m}\ln 2\right)^{1/2} \tag{5.11}$$

unde m este masa atomică, k — constanta lui Boltzmann, T — temperatura absolută a gazului și ω_0 frecvența radiației la maximul de intensitate.

Semilărgimea de bandă minimă $(\Delta\omega_c)_{min}$ care poate fi rezolvată de o cavitate Fabry-Pérot este dată de relația

$$(\Delta\omega_c)_{min} \approx \frac{c(1-\mathscr{R})}{2\pi n_r L} \tag{5.12}$$

în care $\mathscr{R}$ este factorul de reflexie al oglinzilor cavității Fabry-Pérot, iar $n_r L$ — drumul optic dintre oglinzile cavității. Acest $(\Delta\omega_c)_{min}$ este legat de factorul de calitate al cavității prin relația

$$Q = \frac{\omega}{(\Delta\omega_c)_{min}}. \tag{5.13}$$

Un laser oscilează pe mai multe moduri de rezonanță separate între ele prin $\Delta\omega_r$ care depinde de modurile considerate și de tipul cavității rezonante. Semilărgimea unui mod de oscilație $\Delta\omega_M$ este exprimată printr-o relație de forma

$$\Delta\omega_M \geqslant \frac{2\pi h\omega\,(\Delta\omega_c)^2}{\mathscr{P}} \tag{5.14}$$

în care $\mathscr{P}$ este puterea modului considerat.

Divergența

Divergența minimă a unui fascicul paralel coerent spațial se exprimă prin relația

$$\theta_{min} = \frac{1{,}22\lambda}{R} \tag{5.15}$$

unde λ este lungimea de undă a radiației laser, iar R este raza fasciculului sau apertura.

Practic, astăzi se obţin fascicule laser cu divergenţe mult mai mari decît divergenţa minimă exprimată prin formula de mai sus. De exemplu, de la un cristal de rubin cu diametru de 1 cm se obţin pulsuri laser cu divergenţa de ordinul a 0,35° (sau 6 miliradiani), în timp ce cu formula de mai sus pentru $R = 0{,}5$ cm şi $\lambda = 6943$ Å se obţine $\theta_{min} = 0{,}05$ miliradiani. Diferenţa dintre rezultatul experimental şi cel teoretic se explică prin faptul că fasciculul laser nu este uniform distribuit pe întreaga sa suprafaţă transversală.

Energia şi puterea radiaţiei laser

Mărimile energetice care caracterizează radiaţia laser sînt desigur aceleaşi mărimi care caracterizează şi radiaţiile electromagnetice emise de sursele clasice, însă, în cazul radiaţiei laser acestea sînt cu cîteva ordine de mărime mai mari. Principalele mărimi energetice prin care se explică o serie de proprietăţi ale fasciculelor laser sînt: a) Intensitatea; b) Fluxul radiaţiei; c) Densitatea de energie a radiaţiei; d) Puterea radiaţiei. Definirea acestor mărimi energetice şi relaţiile între ele se găsesc în cărţile de fizica laserilor indicate în bibliografie [17, 18].

*
* *

PROBLEME

5.1. Coerenţa mutuală a două radiaţii reprezentate prin

$$u_1(t) = A_1(t) \exp(i\omega_0 t)$$

şi

$$u_2(t) = A_2(t) \exp i(\omega_0 t - \varphi),$$

este definită de relaţia

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle A_1(t+\tau) A_2^*(t) \rangle \exp(-i\varphi) =$$

$$= \langle u_1(t+\tau) u_2^*(t) \rangle.$$

funcţia $\Gamma_{12}(\tau)$ reprezentînd o corelaţie a amplitudinilor sau o corelaţie de ordinul doi. $u_1(t)$ reprezintă amplitudinea complexă a semnalului într-un punct P_1 şi $u_2(t+\tau)$ amplitudinea complexă a semnalului într-un alt punct P_2, considerată după un timp τ faţă de ampli-

tudinea semnalului în P_1, iar $A_1(t)$ și $A_2(t)$ au forma $A(t) = a(t) \exp[i\varphi_0(t)]$.

Se cere să se stabilească expresia gradului de coerență $\gamma_{12}(\tau)$ al radiațiilor emise din punctele P_1 și P_2 evidențiindu-se cele trei cazuri experimentale posibile.

5.2. Să se stabilească expresia gradului de coerență a două radiații emise de două surse aflate în punctele P_1 și P_2, avînd intensitățile $I_1(t+\tau)$, respectiv $I_2(t)$, considerînd o corelație a intensităților (corelație de ordinul patru) definită de expresia:

$$\langle I_1(t+\tau)\, I_2(t)\rangle = \langle U_1(t+\tau)\, U_1^*(t+\tau)\, U_2(t)\, U_2^*(t)\rangle$$

Considerînd un interferometru Hanbury-Brown și Twiss, să se stabilească expresia gradului de coerență, funcție de semnalele măsurate.

5.3. Pentru determinarea coerenței temporale a unui laser, se folosește un interferometru de tip Michelson cu ajutorul căruia se determină vizibilitatea, $V(\Delta)$, a franjelor de interferență în funcție de diferența de drum, Δ, pe care o prezintă cele două fascicule la recepție. Dacă funcția de vizibilitate $V(\Delta)$ este de forma $V(\Delta) = \frac{\sin 2\pi\omega\Delta}{\pi\Delta}$, să se determine spectrul de frecvență al laserului folosit. Cu alte cuvinte, să se determine distribuția intensității în funcție de frecvență, $I(\omega)$.

5.4. Determinîndu-se vizibilitatea franjelor V pentru radiația unui laser cu ajutorul unui interferometru Michelson, s-a găsit că aceasta variază cu diferența de drum δ dintre cele două fascicule după curba din fig. 5.4.

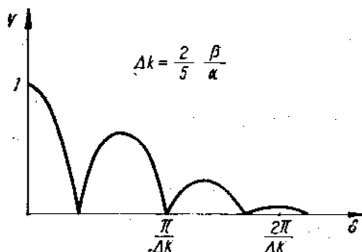


Fig. 5.4.

Curba vizibilității poate fi descrisă analitic de expresia

$$V = \text{Const.} \exp\left[-\left(\frac{\delta}{2\alpha}\right)^2\right] \cdot \left|\cos\frac{\beta}{\alpha}\delta\right|$$

unde α și β sînt doi parametri constanți.

Cu ajutorul acestei expresii a vizibilității franjelor, să se determine structura spectrală a luminii emise de sursă, știind că aceasta prezintă simetrie.

5.5. Pentru măsurarea coerenței spațiale a unui laser care lucrează în impulsuri, se folosește montajul experimental din figura 5.5.

Oglinzile sînt astfel aranjate, încît unghiurile de incidență pe placa fotografică ale celor două fascicule notate cu θ, să fie egale, iar drumurile optice la centru să fie aceleași. Drumul optic al fiecărei raze este mare, astfel ca lumina laser să se împrăștie uniform pe placa fotografică.

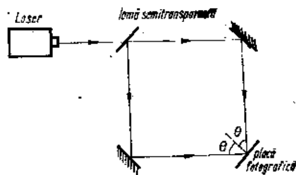


Fig. 5.5.

Modul de lucru este următorul: placa fotografică se expune la un puls laser și se developează. Un laser continuu, care emite pe lungimea de undă λ', diferită, în general, de cea a laserului în impulsuri (λ), iluminează sub un unghi θ' fotografia. Dacă este îndeplinită condiția $\sin\theta' = \frac{\lambda'}{\lambda}\sin\theta$, să se arate că există un fascicul difractat de fotografie la unghiul θ', a cărui intensitate este proporțională cu pătratul gradului de coerență a pulsului laser.

5.6. Doi laseri cu He-Ne, stabilizați în frecvență și amplitudine, emit două fascicule *1* și *2* care se întîlnesc într-un punct dat unde cîmpurile lor electrice E_1 și E_2 pot fi scrise sub forma

$$E_1(t) = \exp\,[i\,\omega_1\,t] \text{ și } E_2(t) = \exp\,[i\,\omega_2\,t],$$

unde $\omega_1 = 474\cdot 10^{12}\ s^{-1}$ și $\omega_2 = 473{,}9995\cdot 10s^{-1}$

Să se afle:

1°. Expresia funcției de coerență mutuală Γ_{12} pentru radiațiile emise de cei doi laseri.

2°. Intervalul de timp în decursul căruia se poate observa interferența obținută cu cele două fascicule laser.

5.7. Se consideră o sursă S monocromatică, de întindere finită, ale cărei puncte sînt reperate de coordonatele ei reduse (u, v). Această sursă trimite lumină cuasimonocromatică pe un ecran care are două orificii identice P_1 și P_2 (fig. 5.7 a). Se cere:

1°. Să se demonstreze teorema Van Cittert și Zernike, conform căreia: „Gradul de coerență între radiația emisă de un punct fix P_2 și un punct mobil P_1, iluminate de o sursă extinsă monocromatică, este egal cu amplitudinea complexă, normalizată în punctul P_1, a unei figuri de difracție centrată pe P_2. Această figură de difracție fictivă este obținută înlocuind sursa cu o deschidere de aceeași formă și de aceleași dimensiuni cu ea; repartiția în amplitudine în această deschidere este egală cu distribuția în intensitate în sursă".

2°. Ţinînd seama de teorema lui Van Cittert-Zernike să se studieze coerenţa spaţială în experienţa Young (fig. 5.7, b) în lumină cuasi-monocromatică, determinîndu-se contrastul franjelor.

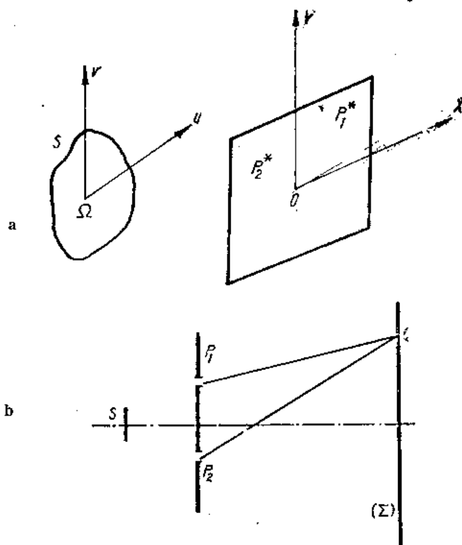


Fig. 5.7.

5.8. O sursă de extensie $\Delta l_x = 10^{-4}$ m, de suprafaţă ΔA_s, se găseşte la distanţă $d = 10^{-1}$ m de un ecran format din două semiplane paralele (P_1) şi (P_2) aşezate ca în figura 5.8.

1°. Condiţiile de coerenţă temporală şi spaţială sînt $\Delta t_c\, \Delta\omega \approx 2\pi$ şi respectiv $\Delta l_x \cdot \Delta\theta_x \leqslant \lambda$, unde $\Delta\theta_x$ este unghiul sub care se văd dintr-un punct al sursei două fante S_1 şi S_2, situate la distanţa ΔL. Δt_c este timpul de coerenţă. Să se arate că aceste condiţii sînt în concordanţă cu relaţiile de incertitudine

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim h$$

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \sim h$$

$$\Delta p_z \cdot \Delta z \sim h.$$

Să se interpreteze cu ajutorul teoriei fotonice, concluziile de mai sus.

2°. Să se găsească diferența de drum δ, introdusă de cele două brațe ale unui interferometru Michelson, pentru a se obține

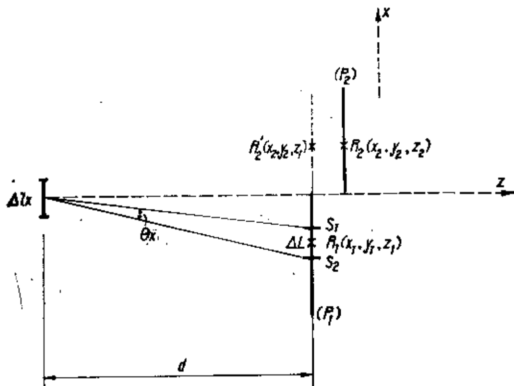


Fig. 5.8.

franje de interferență, folosind o linie laser lărgită omogen, dacă se dă timpul de relaxare transversal, pentru elementele nediagonale ale matricei densitate :

$$T_2 = 3{,}14 . 10^{-8} s.$$

3°. Să se găsească distanța dintre fantele S_1 și S_2, ΔL, dacă se folosește drept sursă linia $3s-2p$ a unui laser cu He—Ne ($\lambda = 6328$ Å).

4. Dacă notăm cu R_2 (x_2', y_2', z_2') proiecția punctului R_2 (x_2, y_2, z_2) pe planul P_1 și considerăm în acest plan punctul R_1 (x_1, y_1, z_1), să se găsească distanța maximă dintre cele două plane, pentru ca radiația la punctele R_1 și R_2 să fie coerentă, dacă se cunosc : $\Delta x = x_2 - x_1 = 10^{-1}$ m, $\Delta y = y_2 - y_1 = 10^{-1}$ m, $\lambda = 0{,}6 \cdot 10^{-6}$ m, $d = 10^{-1}$ m, $T_2 = 3{,}14 . 10^{-8}$ s știind că se folosește o linie laser lărgită omogen.

5.9. Un laser cu rubin emite pulsuri luminoase „gigant", lungimea de undă a radiației fiind $\lambda = 6935{,}9$ Å. Se admite că fiecare puls „gigant" este asimilabil unui tren de unde plane monocromatice polarizate rectiliniu, de amplitudine constantă și de durată $\tau = 0{,}1$ ms, transportînd energia $W = 0{,}5$ J. Secțiunea transversală a fasciculului

este circulară, avînd un diametru $d = 5 \cdot 10^{-3}$ m. Pulsurile gigant se propagă în aer, pentru care se ia indicele de refracţie $n_r = 1$. Se cere :

1°. Să se calculeze numărul N de fotoni transportaţi de un puls gigant.

2°. Să se deducă fluctuaţiile fazei φ a undei asociate celor n_t fotoni, ştiind că fluctuaţiile numărului de fotoni într-o undă sînt egale cu $\sqrt{n_t}$.

3°. Ce concluzii se trag asupra aspectului preponderent : corpuscular sau ondulatoriu ?

4°. Să se calculeze spectrul de frecvenţă al fiecărui puls.

5°. Să se deducă lărgimea spectrală $\Delta\omega$, definită ca jumătatea intervalului care separă cele două zerouri ale lui $G(\omega)$, ce încadrează maximul principal.

6°. Să se deducă o relaţie între lărgimea corespunzătoare în numere de undă şi lungimea L a trenului de undă.

7°. Să se calculeze numeric $\Delta\tilde{\nu}$ în mKayser şi $\Delta\lambda$ în mÅ.

8°. Să se indice — fără un nou calcul — de la ce diferenţă de drum s-ar mai putea obţine fenomenul de interferenţă, dacă s-ar fi primit aceste impulsuri într-un interferometru Michelson. Este realizabil acest lucru ?

9°. Să se calculeze densitatea de energie u transportată de un puls. Pentru calculul volumului ocupat de un tren de unde se va neglija lărgirea fasciculului prin difracţie.

10° Să se deducă valoarea numerică a intensităţii cîmpului electric al undei.

11°. Să se calculeze presiunea exercitată de fascicul pe un ecran plan — perpendicular pe fascicul — în următoarele cazuri :

a) Ecranul totalmente absorbant ;

b) Ecranul este totalmente reflectător ;

c) Ecranul are un factor de reflexie $\mathscr{R} = 0{,}9$ şi un factor de absorbţie $\mathscr{A} = 0{,}1$.

5.10. Se consideră un laser cu He-Ne care oscilează la lungimea de undă $\lambda = 1{,}15$ μm cu o putere de emisie $\mathscr{P} = 10^{-3}$ W. Rezonatorul laserului este format din două oglinzi plane cu factorul de reflexie $\mathscr{R} = 99{,}6\,\%$ situate la distanţa $n_r l = 1$ m una de alta. Temperatura atomică a mediului activ este de 500°K. Inversia de populaţie între nivelele laser este astfel încît $(N_2/g_2 - N_1/g_1)/(N_2/g_2) = 0{,}1$, iar timpul de viaţă pentru emisia spontană între nivelele laser este $\tau_{12} = 10^{-8}$ s.

Să se calculeze :

1°. Semilărgimea Doppler $\Delta\omega_D$ a liniei $\lambda = 1{,}15$ μm.

2°. Semilărgimea rezolvată de cavitatea laser folosită, $\Delta\omega_C$.

3°. Factorul de calitate al cavităţii.

4°. Semilărgimea unui mod de oscilaţie, $\Delta\omega_M$.

5°. Numărul de moduri axiale cuprinse în domeniul $\Delta\omega_D$.

6°. Semilărgimea naturală $\Delta\omega_N$ a liniei $\lambda = 1{,}15$ μm.

7°. Stabilitatea de scurtă durată S^0_∞ presupunînd că aceasta este determinată de emisia spontană și că centrul rezonanței cavității coincide cu centrul liniei atomice.

8°. Limita inferioară a stabilității de lungă durată, S.

5.11. La un laser cu descărcare în gaz, profilul ciștigului e determinat de lărgirea Doppler și de lărgirea naturală a liniei laser.

1°. Să se exprime dependența de temperatură a lărgimii Doppler a liniei laser și ca aplicație numerică să se calculeze lărgimea Doppler a liniei atomice avînd $\lambda = 6328 \cdot 10^{-10}$ m.

Se cunoaște masa molară a Ne $M = 20$ kg/kmol și se consideră $T = 300$°K.

2°. Să se exprime coeficientul de amplificare în funcție de semilărgimea Doppler și să se reprezinte grafic.

3°. Să se exprime coeficientul de amplifcare în funcție de timpul mediu de viață al stării excitate, care dă lărgirea naturală, folosind o tratare clasică și să se reprezinte grafic.

4°. Să se calculeze semilărgimea naturală pentru cazul numeric de la punctul 1° și să se verifice rezultatul cu ajutorul principiului de incertitudine al lui Heisenberg.

5.12. Să se stabilească relația dintre lungimea trenurilor de undă și monocromaticitatea (finețea) radiațiilor spectrale.

Se vor face calculele pentru linia verde a mercurului ($\lambda = 5461$ Å și $\Delta\lambda = 0{,}01$ Å) și pentru radiația din roșu emisă de un laser cu He—Ne ($\lambda = 6328$ Å; $\Delta\omega = 2\pi \cdot 10^4$ s^{-1}).

5.13. Un laser cu He—Ne ($\lambda = 6328$ Å) are un rezonator confocal, cu distanța între oglinzi $d = 1$ m. Cîmpul electric în regiunea paraxială pe unul din reflectori, pentru un mod caracterizat de indicele m, pe direcția coordonatei x, este proporțional cu $\exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] H_m(X)$. H_m este polinomul Hermite de ordinul m, iar mărimea adimensională X este

$$X = x\sqrt{\frac{2\pi}{b\lambda}} = \frac{x\sqrt{c}}{a} \quad \text{cu} \quad c = 2\pi\frac{a^2}{b\lambda}$$

(vezi problema 1.12).

1°. Se cere diametrul fasciculului pe una din oglinzi, definit ca distanța, pe direcția x, la care cîmpul scade la $\frac{1}{e}$ față de valoarea în centrul oglinzii.

2°. Să se calculeze apoi mărimea fasciculului în planul focal al rezonatorului şi să se deducă expresia generală a ei.

3°. Ce diametru va avea fasciculul, presupus circular, la 0,10 m de la ieşirea din cavitate? Dar la 10 m?

5.14. 1°. Fie un corp negru aşezat într-un rezonator de tip Fabry-Perot de lungime L. Se cere energia acumulată în modurile axiale ale cavităţii.

2°. Strălucirea unei lămpi cu mercur în domeniul vizibil este de 250 W/cm². Să se calculeze de cîte ori este mai mare strălucirea unui fascicul de la un laser cu He—Ne, care are o putere $P = 2mW$ şi emite pe lunginea de undă $\lambda = 6328$ Å.

Indicaţie: Strălucirea este fluxul de energie emis de unitatea de suprafaţă a unei surse, în unitatea de unghi solid, perpendicular pe suprafaţă. Între strălucire şi densitate de volum a energiei electromagnetice există relaţia

$$\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} u$$

pentru întreg spectrul şi

$$\mathcal{S}_\omega d\omega = \frac{c}{4\pi} u_\omega d\omega$$

pentru radiaţiile cu frecvenţe cuprinse între ω şi $\omega + d\omega$.

5.15. Pentru optimizarea puterii de ieşire a unui laser cu gaz cu oglinzi exterioare se foloseşte metoda plăcuţei plan paralele în cavitate care se roteşte în jurul poziţiei de unghi Brewster (fig. 5.15).

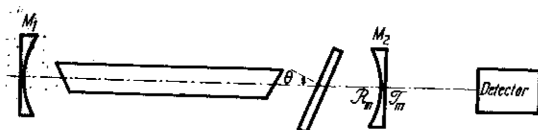


Fig. 5.15.

Ştiind că puterea de ieşire este maximă cînd normala la plăcuţă face un unghi $\theta = 65°$ cu axa laserului, să se determine factorul de reflexie optim, $\mathcal{R}_{0r}$, al oglinzii de ieşire. Se consideră că oglinda de ieşire cu care s-a determinat unghiului θ are factorul de reflexie $\mathcal{R} = 0,99$. Indicele de refracţie al plăcuţei plan paralele este $n_r = 1,5$. Se neglijează absorbţia oglinzii de ieşire precum şi pierderile prin difuzie în interiorul rezonatorului.

6. APLICAŢII

Fasciculele laser şi maser sînt folosite astăzi în toate domeniile ştiinţei şi tehnicii. Parametrii cei mai importanţi ai unui laser sau maser care sînt luaţi în consideraţie în diversele aplicaţii sînt: 1) coerenţa spaţială şi temporală; 2) puterea; 3) caracteristica putere-timp şi 4) lungimea de undă. Coerenţa spaţială şi puterea fasciculului laser permit să se obţină densităţi de putere foarte mari prin focalizarea pe o arie mică în planul focal al unei lentile. Energia focalizată şi absorbită de un material oarecare poate să distrugă forţele de legătură asociate cu structurile atomice şi moleculare ale materialului şi ca urmare, să ducă la schimbări de fază ale materialului.

Operaţiile de microsudură, microgăurire, prelucrare şi tăiere de materiale, cu ajutorul fasciculelor laser, sînt efectuate astăzi curent în industria electronică, în medicină etc.

Cînd energia unui fascicul laser este focalizată cu o lentilă, densitatea de putere P în spotul focal poate fi exprimată prin relaţia

$$\mathcal{P} = \frac{4\mathcal{E}}{\pi f^2 \theta^2 \tau} \tag{6.1}$$

unde $\mathcal{E}$ este energia fasciculului laser, f distanţa focală a lentilei, θ divergenţa fasciculului şi τ durata pulsului laser.

Criteriul lui Rayleigh pentru divergenţa minimă a unui fascicul de lumină coerent spaţial este

$$\theta_{min} = \frac{1{,}22\lambda}{R} \tag{6.2}$$

unde λ este lungimea de undă a fasciculului şi R raza fasciculului sau apertura.

Într-un sistem laser, dimensiunile spotului focal sînt aproximate prin ecuaţia

$$S = f \cdot \theta \tag{6.3}$$

Pe baza relaţiilor de mai sus şi a caracteristicilor fasciculelor laser actuale putem să afirmăm că, în condiţiile cele mai bune este

posibil să se evaporeze straturi subțiri cu dimenisunile de ordinul lungimii de undă a laserului utilizat [19].

Lungimea de undă a fasciculului laser este importantă în determinarea cantității de energie absorbită de material, iar caracteristica putere-timp guvernează rata și durata energiei laser folosite în operația respectivă. Prin utilizarea tehnicilor „Q-switch" și „mode-locking" pot fi obținute pulsuri laser cu puteri mari extrem de scurte (mai mici de 10^{-9} s) care sînt foarte utile în comunicații și în studiul proceselor foarte rapide.

Coerența spațială a laserilor cu gaz de putere mică, cu funcționare continuă, face posibilă utilizarea lor în sistemele de aliniere de mare precizie și ca surse punctuale în diverse aplicații bazate pe difracția radiațiilor electromagnetice.

Coerența temporală a acestor fascicule continue permite realizarea unor experiențe de interferometrie și holografie de mare finețe utilizate în studiul proceselor rapide din fizica plasmei, în studiul prelucrării pieselor optice, în măsurarea vitezelor de deplasare, în controlul microcircuitelor în industria electronică etc.

Indicele de refracție n_r al unei plasme pentru o radiație electromagnetică de frecvență ω este dat de expresia clasică, aproximativă

$$n_r = \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} \tag{6.4}$$

unde $\omega_p = 5{,}6\cdot 10^4\ n_e^{1/2}$ rad$\cdot$s^{-1} și n_e — numărul de electroni pe cm^3 din plasmă. Deci, densitatea electronică a unei plasme poate fi determinată prin măsurarea indicelui său de refracție față de o radiație laser de frecvență cunoscută.

Utilizînd un laser cu heterodinare optică se pot determina foarte precis deplasări de frecvență ale fasciculului reflectat de la diverse corpuri în mișcare. Formulele efectului Doppler pot fi apoi utilizate pentru determinarea vitezelor corpurilor. De exemplu, se folosește azi curent radarul cu laser precum și instrumentele cu laser pentru determinarea vibrațiilor în diverse domenii industriale.

Proprietățile radiației laser au permis observarea interacțiilor neliniare dintre radiația electromagnetică și materie. Dintre fenomenele neliniare menționăm: 1) fenomenul de generare de armonici; 2) formarea plasmei de înaltă temperatură; 3) autofocalizarea radiației laser în medii cu transmisie neliniară; 4) difuzia Mandelstam-Brillouin, etc. [20].

Generarea de armonici are loc în anumite materiale dielectrice datorită prezenței termenilor pătratici și de ordin superior în expre-

sia care leagă polarizarea, P, într-un dielectric cu cîmpul electric incident

$$P = \alpha E + \beta E^2 + \gamma E^3 + \cdots \tag{6.5}$$

Dacă $E = E_0 \cos \omega t$ atunci coeficientul β (cu toate că $\beta \ll \alpha$) arată prezența unui cîmp proporțional cu $E_0^2 \cos^2 \omega t$ care este echivalent cu un cîmp de forma $E_0^2 \cos 2\omega t$, de frecvență dublă față de radiația incidentă. Indicele de refracție este legat de cîmpul radiației incidente printr-o relație analoagă cu relația (6.5)

$$n_r = n_{r0} + n_{r2} E^2 + \cdots \tag{6.6}$$

Un fascicul de lumină cilindric, omogen în intensitate, cu diametrul D, care trece printr-un material al cărui indice de refracție este n_{r0}, se difractă și posedă o divergență $\theta \approx 1{,}22\lambda/n_{r0}D$. Dacă însă luăm în considerație și termenul $n_{r2}E^2$ în expresia indicelui de refracție, atunci indicele de refracție în interiorul cilindrului de lumină este mai mare decît în restul materialului, astfel încît unghiul reflexiei totale, la suprafața laterală a cilindrului luminos depășește unghiul θ și împrăștierea razei ca urmare a difracției nu se mai observă. În cazul cînd este îndeplinită relația (pentru $\theta \ll 1$)

$$\mathcal{P} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{n_{r0} \cdot E^2 \cdot c}{8} \geqslant (1{,}22\lambda)^2 \frac{c}{64\, n_{r2}} \tag{6.7}$$

unde $\mathcal{P}$ este puterea totală a fasciculului, raza de lumină se autofocalizează.

Difuzia Brillouin are loc datorită fluctuațiilor periodice ale indicelui de refracție produse de undele sonore excitate termic care există în mediul difuzant. Spectrul de linii rezultant este un triplet cu componenta centrală avînd frecvența egală cu cea a luminii incidente, o componentă Stokes și una anti-Stokes, care sînt separate de linia centrală printr-un interval de frecvență dat de relația

$$\Delta\omega = \pm\, 2\, \omega_0 \cdot n_r \cdot \left(\frac{V}{c}\right) \sin \frac{\Phi}{2} \tag{6.8}$$

unde V este viteza undei termice de frecvență ω_0 în mediu și Φ este unghiul de difuzie.

În tabelul ce urmează prezentăm o schemă a diverselor aplicații ale celor mai importante dispozitive laser existente astăzi.

Tipul laserului	Mod de funcționare	λ	Energia sau puterea	Aplicații
Rubin (Cr^{+3} în Al_2O_3)	pulsat Q-switched	6,69 μm	1–500 J 1–1000 MW	sudură, găurire, vaporizare de materiale, telemetrie, holografie, difuzie Brillouin, spectroscopie, efecte neliniare, etc.
Nd^{3+} în sticlă	pulsat Q-switched mode-locked	1,06 μm	1–500 J 1–600 MW 1 MW	sudură, găurire, vaporizare, telemetrie, spectroscopie, difuzie comunicații telemetrie, efecte neliniare, etc.
Nd în YAG	Q-switched	1,06 μm	1–50 kW	spectroscopie, vaporizări, difuzie, telemetrie, etc.
GaAs	pulsat	0,900 μm	5 W	comunicații, calculatoare
CO_2-N_2+ $+He$	continuu	10,6 μm	5 kW	fracturări, vaporizări, comunicații, spectroscopie
He–Ne	continuu	0,63 μm	1–1000 mW	interferometrie, aliniere, holografie, difracție, didifuzie, spectroscopie Raman
Ar	continuu	0,488 μm	0,1–100 W	holografie, încălziri, spectroscopie, etc.
	pulsat	0,337 μm	1 kW	spectroscopie, reacții fotochimice etc.

O prezentare sistematică a aplicațiilor laserilor este dată în [21].

*
* *

PROBLEME

6.1. Considerînd laserul cu rubin din problema 5.9, se plasează pe traiectoria fasciculului o lentilă convergentă $\mathscr{L}$, bine corijată de aberații, de distanță focală $f = 5 \cdot 10^{-2}$ m și de diametru suficient de mare pentru a nu diafragma fasciculul. O lamă de oțel Θ

de grosime 10^{-4} m, este plasată în planul focal imagine al lui $\mathscr{L}$ (fig. 6.1, a.)

1°. Să se calculeze raza ρ a fasciculului, la distanța d, datorită difracției.

2°. Se va admite că această pată primește 75% din energia conținută într-un impuls (ținînd seama de factorul de transmisie al

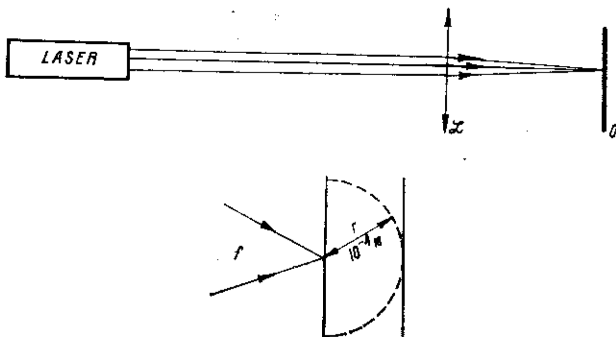


Fig. 6.1 a, b.

lentilei). Factorul de absorbție (pentru intensitate) al lamei O este egal cu 0,1. Energia astfel absorbită se transformă în căldură și difuzează — plecînd de la pata centrală — sub o formă izotropă.

2.1. Se cere să se calculeze cantitatea de căldură care ar trebui furnizată pentru a se ajunge la temperatura de fuziune a unei sfere din oțel cu raza de 10^{-4} m (fig. 6.1, b).

2.2. Să se compare această valoare cu cantitatea de căldură adusă de un impuls laser „gigant". Ce concluzie rezultă?

Se dau următoarele valori numerice: masa volumică a oțelului: $7,83 \cdot 10^3$ kg$\cdot$m^{-3}; căldura masică a oțelului: $0,11 \cdot 4,18 \cdot 10^{-3}$ J$\cdot$kg^{-1}; temperatura de fuziune a oțelului: $t = 1525$°C.

6.2. Un laser cu rubin este folosit pentru sudura a două fire de oțel inoxidabil avînd fiecare diametrul $d = 0,3$ mm. Se dă: a) produsul $\rho H = 10^{10}$ J/m^3, unde ρ este densitatea oțelului, iar H este suma dintre căldura necesară pentru a ridica temperatura unității de masă de la valoarea inițială pînă la punctul de topire și căldura necesară topirii acesteia; b) $D_t = 75 \cdot 10^{-7}$ m^2/s — coeficientul de difuzivitate termică al oțelului; c) factorul de reflexie al firului de

oţel $\mathscr{R} = 0,80$; d) fluxul maxim de căldură permis pentru a nu se evapora oţelul $\Phi_{max} = 16 \cdot 10^9 W/m^2$.

Să se calculeze:

1°. Energia pulsului laser necesar pentru a executa microsudura considerată.

2°. Durata maximă, $T_{p\,max}$ şi durata minimă $T_{p\,min}$, a pulsului laser folosit pentru sudură.

3°. Distanţa focală a lentilei folosite pentru a focaliza în punctul de sudură pulsul laser care are raza secţiunii transversale $R = 2$ mm.

6.3. Asupra unei ţinte metalice suficient de groase cade un puls laser Q-switch astfel încît se poate considera că energia este livrată suprafeţei corpului, instantaneu.

Pulsul este caracterizat de un flux mediu de energie $F = 2 \cdot 10^{11} \frac{W}{m^2}$

Să se calculeze temperatura suprafeţei după un timp $t = 10^{-8}$ s şi de la începutul pulsului.

Se cunosc: conductibilitatea termică a corpului $\sigma_t = 82 \frac{W}{m^\circ \cdot K}$, densitatea $\rho = 7800$ kg/m^3, căldura specifică $c = 450$ J/kg·grd., şi masa molară $M = 56 \cdot 10^{-3}$ kg/mol.

Toată energia este absorbită de metal.

Problema se va trata unidimensional.

6.4. La intrarea într-un interferometru Michelson se trimite fasciculul de ieşire dintr-un laser funcţionînd continuu, care emite pe două moduri nedegenerate. Se detectează (cu ajutorul unui detector lent) intensitatea medie a undei rezultate prin interferenţă, pentru diferite poziţii ale oglinzii mobile.

1°. Să se reprezinte grafic intensitatea detectată, în funcţie de poziţia oglinzii mobile.

2°. Pe parcursul uneia dintre raze, se aşează un mediu dispersiv. Să se determine vitezele de fază şi de grup ale luminii în acest mediu, folosind numai informaţiile furnizate de detector.

6.5. Tehnicile de holografie se bazează pe interferenţa a două fascicule laser pe o placă fotografică (fig. 6.5).

Cavitatea laser este formată din oglinzile O_1 şi O_2 aşezate la distanţa d. Lumina transmisă prin O_2 este despărţită în două fascicule de oglinda semitransparentă OS: unul din fascicule merge direct la placa PH (fascicul de referinţă) iar celălalt ajunge la placa PH, după o reflexie pe oglinda O (fascicul obiect). Fie φ unghiul dintre fascicule. Pe placă fasciculele vor interfera dînd naştere la franje după direcţia x. Pentru impresionarea plăcii este necesar un anumit timp de expunere, timp în care trebuie înlăturate toate

perturbaţiile exterioare, astfel ca sistemul de franje să rămînă neschimbat. În caz contrar are loc o demodulare a franjelor şi nu se obţin holograme.

Să se studieze efectele următoarelor perturbaţii intervenite în montajul de obţinere a hologramei.

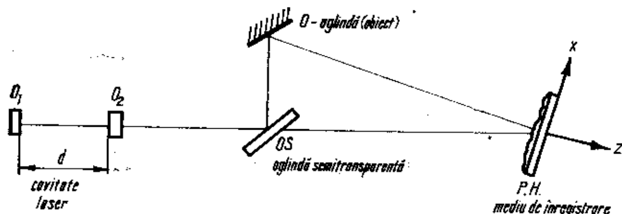


Fig. 6.5

1°. Variaţia în timp a lungimii de undă a laserului, cauzată de variaţia lungimii cavităţii d.

2°. Variaţia în timp a diferenţei de drum optic, între cele două fascicule de interferenţă, cauzată de diferiţi factori ca: gradienţi de temperatură pe traseul celor două fascicule care interferă, curenţi de aer în cameră sau vibraţia suporţilor oglinzilor.

3°. Configuraţia multimodală a laserului (Se presupune o configuraţie multimodală stabilă şi egalitatea intensităţii modurilor la ieşire).

Se defineşte gradul de modulaţie

$$M = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{\sqrt{S^2 + C^2}}{P}$$

unde I_{max} şi I_{min} sînt valorile intensităţilor luminoase corespunzătoare maximelor şi minimelor franjelor

$$S(D) = 2 \int j(x) \sin (xD) \, dx$$

$$C(D) = 2 \int j(x) \cos (xD) \, dx$$

$$P = 2 \int j(x) \, dx.$$

D este diferenţa de drum între fascicule, iar $j(x)$ distribuţia intensităţii spectrale a luminii de la sursa luminoasă $\left(x = k - k_0 = 2\pi\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)\right)$, λ_0 fiind lungimea de undă a liniei centrale a profilului Doppler. Se aproximează $j(x)$ pentru un laser multimodal, cu o sumă de funcţii $\delta(x)$ ale lui Dirac, separate prin $\Delta k = \frac{2\pi}{2d}$, şi se consideră distribuţia spectrală simetrică faţă de linia centrală λ_0.

$\Bigl($Se va exprima unghiul φ în funcţie de lungimea de undă λ a laserului şi de frecvenţa spaţială a franjelor $\nu_f = \frac{\omega_f}{2\pi}\Bigr)$

Aplicaţie :

1°. Schimbarea lui d cu $\frac{\lambda}{2}$, pentru $D = d$.

2°. Apariţia unei diferenţe de drum $\Delta D = \frac{\lambda}{2}$.

3°. Calculul lui M pentru o diferenţă de drum între fascicule $D = 0$, $D = d$, pentru un laser care oscilează pe trei şi patru moduri.

6.6. Giroscopul cu laser (laserul circular), folosit pentru măsurarea vitezelor unghiulare ale diverselor corpuri, are forma unui triunghi echilateral cu latura $a = 0{,}5$ m. În vîrfurile triunghiului sînt aşezate trei oglinzi, iar pe două din laturile triunghiului sînt aşezate două tuburi cu plasmă de He—Ne, care prezintă o amplificare suficientă pentru a produce generarea radiaţiei laser la $\lambda = 0{,}63$ μm în cavitatea rezonantă triunghiulară. Să se afle viteza unghiulară cu care se roteşte platforma pe care este aşezat giroscopul laser dacă se detectează o frecvenţă a bătăilor între modurile undelor care se propagă în cele 2 sensuri în interiorul cavităţii $\Delta\omega_B = 16$ MHz.

6.7. Procesul de formare a plasmei, la interacţia unui fascicul laser intens cu o ţintă solidă, poate fi interpretat cu ajutorul unui model bidimensional, printr-o analogie între fasciculul laser focalizat şi un piston ce se mişcă cu o viteză hipersonică.

1°. Să se explice cu ajutorul acestui model procesul de găurire a unei ţinte solide de forma unei plăci subţiri de grosime δ, cu ajutorul unui fascicul laser intens.

2°. Să se calculeze, pentru cazul unui laser cu rubin cu puls gigant, ce are semidurata pulsului $T_p = 18 \cdot 10^{-9}$ s şi diametrul

spotului focalizat al fasciculului $2r_0 = 14 \cdot 10^{-5}$ m şi a unei ţinte de hidrogen solid, cu grosimea $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$ m:

a) distanţa h_0 dintre frontul de şoc şi frontul de explozie ce apare în plasma creată în ţintă,

b) timpul t_b scurs între sosirea undei de şoc în spatele ţintei şi dispariţia frontului de explozie.

Se vor considera următoarele valori:

— viteza undei de şoc $v_s = 2{,}7 \cdot 10^4 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,

— raportul dintre densitatea materialului scurs şi a materialului evaporat: $\frac{\rho_1}{\rho_0} = 4$.

6.8. Într-o experienţă de interferenţă, un fascicul laser, emis de un laser cu rubin, cu puls gigant, avînd lungimea de undă $\lambda_0 = 6943 \cdot 10^{-10}$ m, a fost scindat în două fascicule, din care unul a trecut prin plasma creată prin iradierea unei ţinte solide de hidrogen cu pulsul laser gigant. Figura de interferenţă obţinută a fost împărţită în elemente de arie $\mathrm{d}A$, apoi s-a măsurat deplasarea franjelor $\varepsilon(x, y)$, datorită trecerii unuia din fascicule prin plasmă, de pe fiecare element de arie, s-a calculat suma produselor $\varepsilon \mathrm{d}A$ de pe toată suprafaţa figurii de interferenţă şi s-a găsit valoarea

$$\int_A \varepsilon\,(x, y)\,\mathrm{d}A = 12{,}55 \text{ interfranje.}$$

Să se calculeze numărul total de electroni liberi creaţi în plasmă.

6.9. Să se deducă ecuaţiile care descriu expansiunea şi variaţia temperaturii pentru plasma care ia naştere cînd suprafaţa unui metal este iradiată cu radiaţie laser de mare intensitate.

Se va considera expansiunea numai pe direcţia normală la suprafaţă. Intensitatea radiaţiei laser este constantă în timp.

6.10. Într-o plasmă densă, creată cu laseri de mare putere, în care drumul liber mediu de ciocnire e mic în comparaţie cu lungimea de undă emisă de laser, neliniarităţile optico-hidrodinamice, care duc la apariţia proceselor de difuzie stimulată şi autofocalizare a fasciculului laser, devin dominante.

Să se calculeze puterea de prag a laserului, necesară pentru apariţia în plasmă a proceselor de:

1°. difuzie stimulată Brillouin,

2°. autofocalizare stimulată datorată forţelor ponderomotoare,

3°. difuzia stimulată termică Thomson,

4°. autofocalizare stimulată datorată efectelor termice.

Aplicaţie numerică la plasma de hidrogen creată de un laser cu rubin de mare putere.

Se dau: temperatura plasmei $T = 1,2 \cdot 10^5$ °K, logaritmul lungimii de undă Spitzer $\ln \lambda_s = 0,9$; lungimea de undă a laserului cu rubin $\lambda_L = 6943 \cdot 10^{-10}$ m; numărul atomic al hidrogenului $Z = 1$; numărul de masă al hidrogenului $A = 1$.

6.11. Folosirea laserilor ca standarde de frecvență impune o stabilizare a frecvenței, care se măsoară prin raportul $S = \frac{\Delta\omega_c}{\Delta\omega_L}$, cu $\Delta\omega_c$ — semilărgimea liniei rezonatorului și $\Delta\omega_L$ — semilărgimea liniei mediului activ.

Să se calculeze raportul dintre semilărgimea liniei spectrale dată de fluctuațiile rezonatorului și frecvența laser și raportul dintre semilărgimea liniei dată de mișcarea termică a oglinzilor rezonatorului și frecvența laser:

a) pentru un laser nestabilizat, avînd $\Delta\omega_c = 10^6$ s^{-1} și $\Delta\omega_L = 10^8$ s^{-1}.

b) pentru un laser stabilizat în frecvență, avînd $\Delta\omega_c = 10^6$ s^{-1} și $\Delta\omega_L = 10^3$ s^{-1}.

Se cunosc: — puterea laserului $P = 10^{-3}$ W, — frecvența radiației laser $\omega = 3 \cdot 10^{15}$ s^{-1}, — temperatura mediului activ $T = 300$°K, — modulul lui Joung al barei metalice pe care sînt fixate oglinzile $y = 10^{10}$Nm^{-2}, — volumul mediului activ $V_a = 10^{-3}$ m^3.

6.12. O metodă de stabilizare a frecvenței laserilor este de a înlocui una din oglinzi cu un mediu difuzant pentru a obține o reacție nerezonantă a cavității, singurul element cu proprietăți rezonante rămînînd linia de amplificare a mediului activ. De aceea, după realizarea condiției de prag toată energia se concentrează în centrul liniei și lărgimea finită a liniei e dată doar de fluctuații.

Să se calculeze diametrul mediului activ al unui laser cu $\lambda = 10^{-6}$ m) în care apar $N = 10^9$ moduri.

6.13. Una dintre metodele moderne de determinare a densității electronice într-o plasmă este metoda interferometrică care utilizează o cavitate rezonantă cuplată cu un laser. Plasma introdusă în rezonatorul cuplat, care posedă un factor de calitate ridicat, schimbă modurile de rezonanță prin variația drumului optic. Dacă lumina laserului care acționează asupra acestui rezonator va reintra în laser, va produce variații în intensitatea fasciculului emis. Aceste variații depind puternic de faza luminii reintroduse în laser și deci de diferența de drum optic introdusă de plasma din cavitatea cuplată.

Să se calculeze:

1°. Densitatea electronică minimă detectabilă a unei plasme care se introduce într-o cavitate cu oglinzi plane cuplată la un laser cu He—Ne cu $\lambda = 0,63\,\mu$m care oscilează pe un mod longitudinal.

2°. Cu cît crește sensibilitatea metodei dacă cavitatea cuplată este formată dintr-o oglindă plană a laserului și o oglindă sferică de rază R care cuplează la laser modurile sale longitudinale și transversale?

6.14. Considerăm un laser inelar, format din trei oglinzi, avînd coeficienții de reflexie r_1, r_2 și r_3 ($r_3 = 1$) și două tuburi laser cu același mediu activ gazos, avînd lungimile d_I și d_{II} (fig. 6.14).

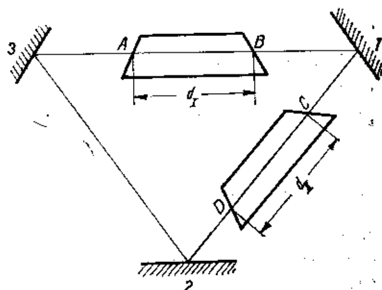


Fig. 6.14

Variația amplitudinii undei prin mecanismul de dispersie neliniară influențează frecvențele undelor emise.

Să se calculeze diferența dintre frecvențele undelor emise de cele două medii active în apropierea pragului, cunoscînd:

— coeficienții de reflexie ai oglinzilor $r_1 = 0,9$ și $r_2 = 0,899$,

— lungimea mediilor active $d = d_I = d_{II} = 3\text{m}$,

— amplificarea în apropierea pragului $g_I = g_{II} = \exp\left(\frac{2\alpha l}{c}\right) = 1,135$,

— forma Doppler a liniilor e dată de factorii $f_i = \frac{\omega_c - \Omega_{0i}}{\Delta\omega_D}$,

unde $i = I, II$, ω_c este frecvența de rezonanță a cavității, Ω_{0i} — centrul liniei Doppler, iar $\Delta\omega_D$ semilărgimea liniei Doppler. Factorii f_i au valorile $f_I = 2$ și $f_{II} = 2,2$.

6.15. La transmiterea semnalelor laser pe distanțe mari se folosește un sistem de detecție cu doi fotodetectori nesincroni a cărui schemă este dată în figura 6.15.

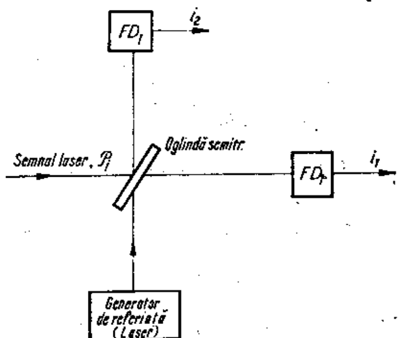


Fig. 6.15

Semnalul laser cu puterea $\mathscr{P}_L = 0{,}1$ mW și cu $\lambda = 0{,}63$ μm cade asupra unei oglinzi care are un coeficient de reflexie egal cu $\frac{\exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2}}$ și un coeficient de transmisie egal cu $\frac{\exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2}}$. Scrierea sub formă complexă a coeficienților de reflexie și transmisie ne dă posibilitatea să observăm că vectorii de vibrație, reflectați sau transmiși prin oglindă, suferă o deplasare de fază suplimentară egală cu $\frac{\pi}{4}$ sau $-\frac{\pi}{4}$ și o atenuare de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ori. Pe o direcție perpendiculară pe direcția semnalului laser se transmite un semnal de referință de la un laser care emite o putere $\mathscr{P}_r = 100$ mW pe un mod de oscilație vecin cu modul pe care oscilează laserul al cărui semnal îl detectăm. De la oglindă pornesc 2 fascicule la 2 fotodetectori caracterizați fiecare de o eficiență cuantică $\eta = 4 \cdot 10^{-2}$.

Să se afle :

1°. Raportul semnal/zgomot pentru un astfel de detector pentru o bandă de frecvență corespunzătoare unui filtru cu lărgimea de bandă de 10 Å, dacă zgomotul este un zgomot intern al sistemului de detecție.

2°. Să se compare rezultatul obținut la punctul 1 cu raportul semnal/zgomot al unui amplificator ideal ($\eta = 1$) pentru radiațiile optice coerente.

6.16. Asigurarea unei mari stabilități în frecvență a oscilatorului laser se poate realiza cu ajutorul unei oscilații exterioare de frecvență apropiată injectată în oscilator, prin fenomenul de blocare a frecvenței.

Să se stabilească relația care există între intensitatea oscilației injectate și distanța maximă care poate separa frecvența oscilatorului laser liber de frecvența oscilației injectate.

Oscilațiile sursei exterioare sînt considerate liniar polarizate iar mediul laser, omogen și izotrop.

6.17. Un fascicul laser cu lungimea de undă $\lambda = 0{,}4416$ μm este folosit pentru transmiterea convorbirilor telefonice și a programelor de televiziune. Știind că se folosește pentru modulare numai 0,1% din frecvența purtătoarei să se afle :

1°. Capacitatea de transmisie a fasciculului laser care are o putere medie de 100 mW și un zgomot de putere medie de 10^{-11} W.

2°. Numărul de convorbiri telefonice care pot fi transmise simultan dacă lărgimea de bandă a unui canal telefonic este $B_{c,t} = 4200$ Hz.

3°. Numărul de programe de televiziune care pot fi transmise simultan dacă lărgimea de bandă a unui canal de televiziune este $B_{tv} = 6$ MHz.

6.18. Un laser cu He—Ne care emite pe lungimea de undă $\lambda_0 = 1{,}15$ μm corespunzătoare tranziției $2s_2 \to 2p_4$, este așezat într-un cîmp magnetic constant și uniform, paralel cu axa Oz a rezonatorului. Ferestrele laserului nu sînt inclinate la unghi Brewster, permițînd oscilațiile cu orice polarizație.

1°. Se cere diferența între frecvențele tranzițiilor $2s_2 \to 2p_4$, cu diferite polarizații.

2°. Frecvența tranziției $2s_2 \to 2p_4$ neperturbate de cîmpul B_0, este apropiată de frecvența modului TEM_{00q} al cavității. Fasciculul laser trece printr-un polarizor și apoi este detectat. Intensitatea detectată are o modulație de amplitudine. Se cere explicația acestui fenomen și frecvența de modulație în următoarele două cazuri:

a) Cîmpul B_0 este slab, astfel încît diferența între frecvențele nivelelor Zeeman este mult mai mică decît cea dintre frecvențele a două moduri longitudinale succesive: $2\Delta\omega_B \ll \omega_{q,q+1}$.

b) Despicarea nivelelor în cîmpul B_0 este atît de mare, încît $2\Delta\omega_B \approx \omega_{q,q+1}$. În acest caz, se presupune că oscilează două moduri, unul cu polarizație σ_-, în apropierea frecvenței ω_q a modului TEM_{00q}, iar altul cu polarizație σ_+, în apropierea frecvenței ω_{q+1} a modului TEM_{00q+1}.

3°. Menținînd constant cîmpul B_0, se mărește puterea de pompaj, pînă cînd laserul oscilează pe trei moduri: $|q-1>$, $|q>$ și $|q+1>$, în modul $|q>$ existînd ambele polarizații $\sigma_\pm$. Dacă $2\Delta\omega_B = \omega_{q,q+1}$, să se găsească relația între fazele modurilor de oscilație, la îndeplinirea căreia intensitatea fasciculului laser devine constantă.

Aplicație numerică: lungimea de undă a radiației emise: $\lambda_0 = 1{,}15$ μ, lărgimea Doppler a tranziției: $\Delta\omega_D = 2\pi \cdot 10^3$ MHz, coeficienții Landé ai nivelului inferior și superior $g_1 \approx g_2 \approx 1{,}3$, lungimea cavității: $L = 1$ m, factorul de calitate al cavității: $Q_c \approx 10^8$, magnetonul Bohr: $\mu_B = 0{,}927 \cdot 10^{-23}$ J/T.

6.19. Telefonul cu laser construit în laboratorul de fizică al Institutul Politehnic din București funcționează pe principiul modulării în frecvență a fasciculului unui laser cu He—Ne. Ecuația undei laser este de forma

$$u_1 = A \exp\,[i(\omega_0 t - \varphi)].$$

Se presupune că deplasarea de frecvență a luminii se produce numai prin efect Doppler, prin reflexie pe o membrană, care oscilează după legea $s = a \sin \omega_m t$, și care joacă rolul uneia din oglinzile unui interferometru de tip Michelson.

1°. Să se calculeze deplasarea de frecvenţă introdusă de suprafaţa perturbatoare.

2°. Să se găsească ecuaţia undei reflectate u_2.

3°. Să se arate că u_2 se poate pune sub forma unei serii Fourier, în care coeficienţii sînt funcţii Bessel de ordin întreg.

4°. Pentru extragerea semnalului se foloseşte un detector cu răspuns pătratic, curentul de semnal fiind proporţional cu iluminarea suprafeţei detectorului pe care se mixează undele u_1 şi u_2 (heterodinare).

Să se găsească forma curentului de semnal modulat, la ieşirea din fotodetector.

6.20. Să se studieze efectul electrooptic pătratic în K.T.N. ($KT_{a\,0.65}\ N_{b\,0.35}\ O_3$) calculîndu-se :

1°. Retardarea $\Delta\Phi$ între componentele cîmpului electric al undelor luminoase, polarizate după direcţiile X_1, X_2, ştiind că propagarea se face după direcţia X_3, unde axele $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $X_3 = Z$ sînt specificate de elipsoidul indicilor

$$\left[\left(\frac{1}{n_r^2}\right)_{ij} + R_{ijkl}E_kE_l\right]X_iX_j = 1$$

cu condiţia

$$\left(\frac{1}{n_r^2}\right)_{ij} = \delta_{ij}\,\frac{1}{n_r^2}$$

în care R_{ijkl} sînt coeficienţii electrooptici pătratici, n_r — indicele de refracţie al mediului izotrop iar δ_{ij} simbolul lui Kronecker. Cîmpul electric este aplicat după direcţia X_2.

2°. Tensiunea $U_{\lambda/2}$ care produce o retardare $\Delta\Phi = \pi$, în cazul în care cîmpul aplicat după direcţia X_2 este de forma

$$\bar{E} = \bar{E}_{v_0} + \bar{E}(t) \text{ cu condiţia } |\bar{E}(t)| \ll |\bar{E}_{v_0}|,$$

$\bar{E}_{v_0}$ fiind un cîmp electric constant iar $\bar{E}(t)$ un cîmp electric variabil în timp.

3°. Ştiindu-se că experimental se foloseşte relaţia :

$$\Delta_1 n_{r\parallel} - \Delta_2 n_{r\perp} = B\lambda_0 |\bar{E}|^2$$

unde $n_{r\parallel}$ şi $n_{r\perp}$ sînt indicii de refracţie după direcţiile paralelă cu cîmpul aplicat şi respectiv perpendiculară, să se determine expre-

sia constantei lui Kerr, B, pornindu-se de la calculul birefringenţei induse.

Se cunosc dimensiunile L_x, L_y, L_z, ale cristalului modulator.

6.21. Pentru modularea electrooptică cu ajutorul efectului Pockels se foloseşte un cristal tetragonal din clasa $\bar{4}2m$ (KDP) în care efectul electrooptic pătratic este neglijabil, iar datorită simetriilor cristalului, singurii coeficienţi electrooptici liniari diferiţi de zero sînt : $r_{41} = r_{52}$ şi r_{63}.

Fie $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $X_3 = Z$ axele principale ale cristalului, $n_{r1} = n_{r2} = n_{r0}$ — indicele de refracţie ordinar, $n_{r3} = n_{re}$ — indicele de refracţie extraordinar şi $\bar{E}_3 = \bar{E}$, singura componentă a cîmpului electric exterior diferită de zero, care se aplică după axa Z a cristalului (axa optică).

1°. Să se calculeze birefringenţa indusă pornindu-se de la elipsoidul indicilor, ($b = n_{r1} - n_{r2}$), în cazul în care propagarea fasciculului prin cristal se face după axa Z (efect electrooptic longitudinal) (fig. 6.21, a)

2°. Să se calculeze retardarea $\Delta\Phi = \varphi_x - \varphi_y$ între componentele cîmpului electric al undei luminoase la ieşirea din modulator.

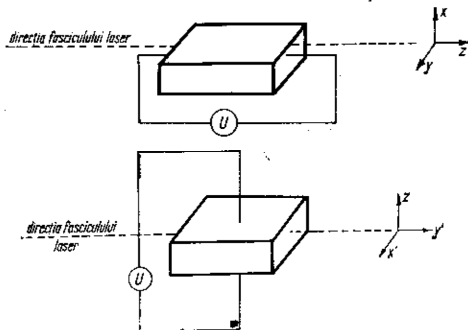


Fig. 6.21 a b

3°. Să se calculeze tensiunea $U_{\lambda/2}$, care aplicată asupra cristalului, produce un defazaj $\Delta\Phi = \pi$.

4°. Să se extindă rezultatele de mai sus pentru cazul în care propagarea se face după axa $X_2 = Y$ (efect electrooptic transversal) (fig. 6.21, b)

5°. Aplicaţie numerică : $n_{r0} = 1{,}51$, $r_{63} = 10,6 \cdot 10^{-12}$ m/V, $\lambda_0 = 0{,}5$ μm, $L_z = 6 \cdot 10^{-3}$ m, $L_y = 18 \cdot 10^{-3}$ m.

6.22. 1°. Folosind reprezentarea complexă a cîmpului electric și notînd starea de polarizare prin vectorul coloană

$$Q = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

unde E_x și E_y sînt componentele ortogonale ale cîmpului electric, să se găsească matricile de polarizare pentru următoarele stări de polarizare :

a) polarizarea liniară după axa X
b) polarizare liniară după axa Y
c) polarizare liniară la 45° față de axa X
d) polarizare liniară la −45° față de axa X
e) polarizare circular dreaptă
f) polarizare circular stîngă.

2°. Definindu-se matricea de coerență J prin expresia

$$J = \begin{bmatrix} [\overline{E_x E_x^*}] & [\overline{E_x E_y^*}] \\ [\overline{E_y E_x^*}] & [\overline{E_y E_y^*}] \end{bmatrix}$$

unde E_x^*, E_y^* sînt expresiile complexe conjugate pentru E_x și E_y, iar produsele care formează elementele matricei sînt mediate în timp, să se găsească matricele de coerență pentru stările de polarizare ($a \div f$).

3°. Asociindu-se diferitelor elemente optice pasive care produc transformări liniare asupra undei luminoase laser, operatorii liniari reprezentați prin matrice de forma

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

să se găsească matricile asociate operatorilor care au ca efect :

a) schimbarea de fază de $2\Delta\Phi$ între componentele E_x și E_y ale cîmpului,

b) rotirea planului de polarizare cu unghiul θ,

c) atenuarea componentelor E_x și E_y definită de coeficienții de absorbție Γ_x și Γ_y.

4°. Folosindu-se tratarea matriceală, să se studieze modularea de amplitudine produsă cu ajutorul efectului electrooptic liniar (Pockels) (fig. 6.22) determinîndu-se :

a) Matricea de polarizare a fasciculului laser la ieşirea din sistemul de modulare, dacă se foloseşte o lamă sfert de undă pentru stabilirea punctului de funcţionare.

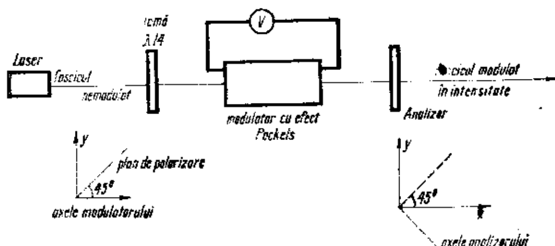


Fig. 6.22

b) Intensitatea fasciculului la ieşire I_e în funcţie de intensitatea fasciculului de intrare I_i.

c) Gradul de distorsiuni al semnalului la ieşire, definit ca raportul dintre rădăcina pătrată a sumei amplitudinilor armonicilor către amplitudinea fundamentalei, dacă se cunoaşte întîrzierea de fază $\Delta\Phi$ introdusă de modulator şi presupunîndu-se tensiunea aplicată pe modulator sinusoidală.

d) Gradul de modulaţie al semnalului, definit de relaţia

$$M = \frac{(I_e)_{max} - (I_e)_{mediu}}{(I_e)_{mediu}} \ 100\ \%$$

în ipoteza unui grad de distorsiuni neglijabil.

6.23. O metodă de modulare internă a fasciculului laser se bazează pe modularea constantei dielectrice a mediului, care se presupune că variază după o lege armonică în timp

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(r) \cos(\omega t + \varphi).$$

Folosindu-se dezvoltarea cîmpului din cavitate în funcţie de modurile normale ale cavităţii, în prezenţa modulaţiei

$$\bar{E}(r, t) = -\sum_q \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \bar{E}_q(r) \left[i \left(\frac{\omega_q}{2} \right)^{1/2} (C_q^* - C_q) \right]$$

$$\bar{H}(r, t) = \sum_q \frac{1}{\sqrt{\mu}} \omega_q \bar{H}_q(r) \left[(2\omega_q)^{-1/2} (c_q^* - c_q) \right]$$

se obține ecuația de mișcare

$$\frac{dG_q^*}{dt} + iq\Delta\omega G_q^* = -\frac{iK}{2}\left(G_{q+1}^* + G_{q-1}^*\right)$$

unde amplitudinile G_q^* sînt definite prin relațiile:

$$C_q^*(t) = D_q^*(t)e^{i\omega_q t} = G_q^*(t)\exp\,[i(\omega_q + q\Delta\omega)\,t + q\varphi)$$

iar K este o constantă care depinde de coeficientul de cuplaj dintre modurile longitudinale ale laserului.

1°. Știind că abaterea $\Delta\omega$ a frecvenței de modulație ω de la diferența de frecvență dintre două moduri alăturate ale laserului este mică în comparație cu ω, iar indicele q specifică modurile longitudinale de oscilație, să se arate că unda de ieșire a laserului este o undă modulată în frecvență.

2°. Să se găsească indicele de modulație corespunzătoare.

6.24. Pentru excitarea unui laser cu rubin se folosește o lampă cu xenon. Lungimea descărcării este $l = 0{,}08$ m, iar diametrul $d = 10^{-2}$ m. Emisia lămpii este produsă prin descărcarea unui condensator. Pentru a proteja lampa, durata pulsului trebuie să depășească 100 μs, lungirea lui obținîndu-se prin montarea unei bobine în serie cu tubul.

Xenonul emite în banda de absorbție a rubinului (3500 Å — — 4500 Å și 5000 Å — 6000 Å) la o densitate de curent a descărcării $J = 5\cdot10^7\ \text{A}\cdot\text{m}^{-2}$.

Rezistența lămpii depinde de curentul instantaneu care o străbate după relația

$$R = \frac{k}{\sqrt{I}} = 1{,}2\,\frac{l}{\sqrt{A}}\cdot\frac{1}{\sqrt{I}},$$ unde A este secțiunea transversală a lămpii.

Se va alege lungimea pulsului mai mică decît timpul de viață al nivelului metastabil laser ($\tau = 3\cdot10^{-3}$ s.).

Se cer următorii parametri: capacitatea și inductanța schemei, tensiunea optimă de lucru, energia stocată în condensator și puterea pulsului.

Observație: în același fel se calculează circuitul de excitare a unui laser cu sticlă cu Nd^{3+}, deosebirile apărînd la alegerea densității de curent ($1{,}7\cdot10^7$ A/m²) și la considerarea timpului de viață $\tau = 10^{-4}$ s.

REZOLVĂRI

1.1. 1°. Problema se rezolvă pentru un mod de oscilaţie cu variaţie armonică în timp, soluţia generală obţinîndu-se prin superpoziţie. În interiorul cavităţii, ecuaţiile lui Maxwell se scriu

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= i\omega\mu \bar{H} \\ \operatorname{rot} \bar{H} &= -i\omega\varepsilon \bar{E} \\ \operatorname{div} \bar{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \bar{H} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Pereţii fiind perfect conductori, condiţiile pe frontieră sînt

$$\bar{E} \times n|_{\Sigma} = 0 \tag{1.1.2}$$

$$\bar{H} \cdot \bar{n}|_{\Sigma} = 0. \tag{1.1.3}$$

Problema se rezolvă lucrînd cu sistemul de ecuaţii Maxwell scrise pe componente, sau, mai uşor, introducînd un potenţial vector.

α) Modurile TM ($H_z = 0$).

Cîmpul magnetic fiind solenoidal, se introduc potenţialul vector $\bar{A}$ şi vectorul lui Hertz $\overline{\Pi}$ prin relaţiile

$$\mu\bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A}, \quad \bar{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial t}.$$

Expresiile cîmpurilor în funcţie de vectorul lui Hertz sînt

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{\Pi} + \varepsilon\mu\omega^2 \Pi \\ \bar{H} &= \varepsilon \operatorname{rot} \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -i\omega\varepsilon \operatorname{rot} \Pi. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Modurile TM se obțin în cazul particular $\bar{\Pi} = \Pi\, \bar{1}_z$.

Cu condițiile impuse parametrilor Lamé, se poate scrie pentru Π o ecuație de tip Helmholtz

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \Delta_2\Pi + k^2\Pi = 0, \quad k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \qquad (1.1.5)$$

unde Δ_2 este laplaceianul bidimensional

$$\Delta_2 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right)\right].$$

Pe suprafața laterală a rezonatorului, se alege un sistem triortogonal ($\bar{1}_z$, $\bar{1}_n$, $\bar{1}_t$), unde $\bar{1}_n$ este normala la suprafață, iar ceilalți doi versori se află în planul tangent. Condiția (1.1.2) se scrie

$$E_t|_\Sigma = 0 \text{ și } E_z|_\Sigma = 0. \qquad (1.1.6)$$

Expresiile componentelor cîmpului electric rezultă din (1.1.4), ținînd cont de relația

$$\text{grad div } \Pi = \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}\bar{1}_z + \frac{1}{h_n}\frac{\partial^2\Pi}{\partial n\,\partial z}\bar{1}_n + \frac{1}{h_t}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t\,\partial z}\bar{1}_t$$

$$E_t\Big|_\Sigma = \frac{1}{h_t}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t\,\partial z}\Big|_\Sigma = 0$$

$$E_z\Big|_\Sigma = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi\right)\Big|_\Sigma = 0.$$

Condițiile sînt sigur satisfăcute, dacă

$$\Pi|_\Sigma = 0 \qquad (1.1.7)$$

Pe planele $z = 0$, $z = l$, normala este dată de $\bar{I}_z$. Notînd cu $\bar{I}_n$ un versor dintr-un astfel de plan, se scrie condiția (1.1.2) sub forma

$$E_t\Big|_{\substack{z=0\\z=l}} = \frac{1}{h_t}\,\frac{\partial^2\Pi}{\partial t\,\partial z}\Big|_{\substack{z=0\\z=l}} = 0$$

$$E_{n'}\Big|_{\substack{z=0\\z=l}} = \frac{1}{h_{n'}}\,\frac{\partial^2\Pi}{\partial n'\,\partial z}\Big|_{\substack{z=0\\z=l}} = 0$$

Pentru satisfacerea acestor relații, este suficient ca

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}\Big|_{\substack{z=0\\z=l}} = 0 \qquad (1.1.8)$$

Ecuația (1.1.5) se descompune prin separarea variabilelor

$$\Pi(x,\ y,\ z) = \psi(x,\ y)\cdot f(z) \qquad (1.1.9)$$

$$\Delta_2\psi(x,\ y) + \lambda^*\psi(x,\ y) = 0 \qquad (x,\ y) \in S \qquad (1.1.10)$$

$$\psi(x,\ y)\,|_c = 0 \qquad c \equiv S \cap \Sigma \qquad (1.1.11)$$

unde S este o secțiune prin cavitate, perpendiculară pe axa z.

$$\begin{cases} f''(z) + (k^2 - \lambda^*)\, f(z) = 0 & (1.1.12)\\ f'(z)\Big|_{\substack{z=0\\z=l}} = 0 & (1.1.13)\end{cases}$$

λ^* este valoarea proprie a laplaceianului bidimensional, corespunzător ecuației (1.1.10).

Ecuația (1.1.12) cu condițiile (1.1.13) are soluția imediată

$$f(z) = A_q \cos\sqrt{k_q^2 - \lambda^*}\, z \qquad (1.1.14)$$

$$k_q^2 - \lambda^* = \frac{q\pi}{l}. \qquad (1.1.15)$$

Ecuaţia (1.1.10) cu condiţiile (1.1.11) are ca soluţii funcţiile proprii $\psi_m(x, y)$, asociate valorilor proprii λ_m^*.

În vibrator apar numai unde cu frecvenţele ω_{mq}

$$\omega_{mq} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2 + \lambda_m^*} \tag{1.1.16}$$

$$\lambda_{mq} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{q}{l}\right)^2 + \frac{\lambda_m^*}{\pi^2}}} \tag{1.1.17}$$

Expresia potenţialului de polarizare (vectorul Hertz) este :

$$\overline{\Pi} = A_{mq}\psi_m(x, y) \cos \frac{q\pi}{l} \exp[-i\omega_{mq} t]\, \bar{I}_z. \tag{1.1.18}$$

Distribuţia de cîmpuri se găseşte introducînd această relaţie în (1.1.14).

β) Modurile TE ($E_z = 0$).

Este comod să se introducă un potenţial vector asociat cîmpului electric solenoidal

$$\bar{E} = -\mu \operatorname{rot} \frac{\partial \bar{K}}{\partial t} = i\omega\mu \operatorname{rot} \bar{K} \tag{1.1.4'}$$

$$\bar{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{K} + k^2\bar{K} \tag{1.1.4''}$$

Modul TE se obţine pentru $\bar{K} = K\, \bar{I}_z$. Mărimea K satisface ecuaţia (1.1.5), cu alte condiţii la limită

$$\left.\frac{\partial K}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0 \tag{1.1.7'}$$

$$K \Big|_{\substack{z=0 \\ z=l}} = 0. \tag{1.1.8'}$$

Soluţia este

$$K_{mq} = B_{mq}\varphi_m(x, y) \sin \frac{q\pi}{l} z.$$

Frecvențele proprii ω_{mq} sînt date de

$$\omega_{mq} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2 + \lambda_m^{**}} \qquad (1.1.16')$$

unde λ_m^{**} sînt valorile proprii asociate funcțiilor proprii $\varphi_m(x, y)$.

Pentru cazurile particulare, rămîne de rezolvat problema cu valori proprii (1.1.10), cu condițiile la limită (1.1.11) sau (1.1.7').

Paralelipiped dreptunghic. Laturile secțiunii sînt a și b. Funcțiile proprii se obțin imediat punînd condițiile la limită

$$\psi(x, y)\Big|_{\substack{x=0,a \\ y=0,b}} = 0 \qquad \text{unde TM}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{y=0,b} = 0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{x=0,a} = 0 \qquad \text{unde TE}$$

$$\psi_{rs}(x, y) = A_{rs} \sin\frac{r\pi}{a} x \sin\frac{s\pi}{b} y \qquad \text{unde TM} \quad (1.1.19')$$

$$\psi_{rs}(x, y) = B_{rs} \cos\frac{r\pi}{a} x \cos\frac{s\pi}{b} y \qquad \text{unde TE} \quad (1.1.19'')$$

cu frecvențele ω_{rsq} și lungimile de undă λ_{rsq}

$$\omega_{rsq} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{s}{b}\right)^2 + \left(\frac{q}{l}\right)^2} \qquad (1.1.20)$$

$$\lambda_{rsq} = \frac{2\pi}{\omega_{rsq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (1.1.21)$$

Cilindru circular drept. Dacă raza cilindrului este a, condițiile la limită în coordonate cilindrice duc la următoarele expresii pentru potențialele vector introduse pentru modurile TM, respectiv TE

$$\Pi(\rho, \varphi, z) = A_{rsq} J_s(\rho a) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} s\varphi \cos\frac{q\pi}{l} z \exp[-i\omega_{rsq} t]\, I_z \quad (1.1.22')$$

$$\overline{K}(\rho, \varphi, z) = B_{rsq} J_s'(\rho a) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} s\varphi \sin\frac{q\pi}{l} z \exp[-i\omega_{rsq} t]\, I_z \quad (1.1.22')$$

$$\omega_{rsq} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{x_{sr}}{a}\right)^2}. \qquad (1.1.23)$$

x_{sr} este rădăcina a r—a a ecuației $J_s(x) = 0$ pentru unde TM și a ecuației $J'_s(x) = 0$ pentru unde TE.

2°. Relațiile de ortogonalitate propuse sînt valabile pentru orice sistem de coordonate, indiferent de proprietățile parametrilor Lamé.

Deoarece laplaceianul este un operator hermitic, vectorii săi proprii care aparțin unor valori proprii diferite sînt ortogonali. Primele relații de ortogonalitate sînt valabile în virtutea acestei propoziții, deoarece există relațiile

$$\Delta \bar{E}_m + k_m^2 \bar{E}_m = 0$$

$$\Delta \bar{H}_m + k_m^2 \bar{H}_m = 0$$

$$k_m^2 = \omega_m^2 \varepsilon\mu.$$

Pentru demonstrarea ultimei relații de ortogonalitate se procedează astfel

$$\int_V \bar{H}_m \cdot \bar{E}_n \, \mathrm{d}v = \frac{1}{i\omega_n \varepsilon} \int_V \bar{H}_m \cdot (\nabla \times \bar{H}_n) \, \mathrm{d}v = \frac{1}{i\omega_n \varepsilon} \oint_\Sigma (\bar{H}_n \times \bar{H}_m) \cdot \bar{n} \, \mathrm{d}A \, +$$

$$+ \frac{1}{i\omega_n \varepsilon} \int_V \bar{H}_n \cdot (\nabla \times \bar{H}_m) \, \mathrm{d}v = \frac{1}{i\omega_n \varepsilon} \oint_\Sigma (\bar{H}_n \times \bar{H}_m) \cdot \bar{n} \, \mathrm{d}A + \frac{\omega_m}{\omega_n} \int_V \bar{H}_n \cdot \bar{E}_m \mathrm{d}v. \tag{1.1.24}$$

$$\int_V \bar{H}_m \cdot \bar{E}_n \, \mathrm{d}v = -\frac{1}{i\omega_m \mu} \int_V (\nabla \times \bar{E}_m) \cdot \bar{E}_n \, \mathrm{d}V = -$$

$$-\frac{1}{i\omega_m \mu} \oint_\Sigma (\bar{E}_m \times \bar{E}_n) \cdot \bar{n} \, \mathrm{d}A - \frac{1}{i\omega_m \mu} \int_V \bar{E}_m \cdot (\nabla \times \bar{E}_n) \, \mathrm{d}V. \tag{1.1.25}$$

Permutînd factorii produsului mixt din integrala de suprafață, se observă că, în virtutea condiției (1.1.2), aceasta se anulează. Dacă este satisfăcută condiția din enunț de anulare a integralei de suprafață din ecuația (1.1.24), se obține

$$\frac{\omega_m}{\omega_n} \int_V \bar{H}_n \cdot \bar{E}_m \, \mathrm{d}v = \frac{\omega_n}{\omega_m} \int_V \bar{H}_n \cdot \bar{E}_m \, dv. \tag{1.1.26}$$

Frecvenţele fiind diferite, rezultă anularea integralei.

3°. $$\mathscr{E}_e(t) = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2}\,\mathrm{d}v \quad \mathscr{E}_m(t) = \int_V \frac{\mu H^2}{2}\,\mathrm{d}v.$$

Părţile reale ale componentelor cîmpurilor rezultă din (1.1.4), pentru modul TM

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x\,\partial z}\cos\omega t, \; E_y = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y\,\partial z}\cos\omega t, \; E_z = \left(\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi\right)\cos\omega t \\ H_x = -\omega\varepsilon\dfrac{\partial \Pi}{\partial y}\sin\omega t, \; H_y = \omega\varepsilon\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}\sin\omega t, \; H_z = 0 \end{cases}$$

$$\mathscr{E}_e(t) = \frac{A^2\varepsilon}{2}\cos^2\omega t\left\{\int_S\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}A\cdot\int_0^l [f'(z)]^2\,\mathrm{d}z + \right.$$
$$\left. + \int_S \psi^2\,\mathrm{d}A\int_0^l (f'' + k^2 f)^2\,\mathrm{d}z\right\}\cdot$$

Dacă funcţiile f şi ψ sînt normate

$$\int_0^l f^2(z)\,\mathrm{d}z = 1, \int_S \psi^2(x, y)\,\mathrm{d}A = 1.$$

$$\int_0^l [f'(z)]^2\,\mathrm{d}z = f\cdot f'\Big|_0^l - \int_0^l f\cdot f''\,\mathrm{d}z = (k^2 - \lambda^*)\int_0^l f^2\,\mathrm{d}z = k^2 - \lambda^*$$

$$\text{căci } f'(z)\Big|_{\substack{z=0\\z=l}} = 0$$

$$\int_0^l [f'' + k^2 f]^2\,\mathrm{d}z = \lambda^{*2}\int_0^l f^2\,\mathrm{d}z = \lambda^{*2}.$$

Integrala de suprafaţă se calculează cu prima formulă Green

$$\int_S\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}A = \oint_C \psi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\mathrm{d}s - \int_S \psi\Delta_t\psi\,\mathrm{d}A = \lambda^*\int_S \psi^2\,\mathrm{d}A = \lambda^*$$

$$\text{căci } \psi(x, y)\Big|_{C\subset\Sigma} = 0$$

$$\mathscr{E}_e(t) = \frac{\varepsilon A^2}{2}\lambda^* k^2\cos^2\omega t.$$

Asemănător

$$\mathscr{E}_m(t) = \frac{\varepsilon A^2}{2} \lambda^* k^2 \sin^2 \omega t$$

$$\mathscr{E}_{tot} = \frac{\varepsilon A^2}{2} \lambda^* k^2.$$

Aceasta este energia electromagnetică corespunzătoare unui mod al cavității (indicii au fost omiși pentru simplificare).

Energia totală se conservă, cu toate că energia electrică și cea magnetică depind de timp.

4°.

$$TM_{110}: f_{110} = \frac{\omega_{110}}{2\pi} = \frac{c}{2} \cdot \frac{x_{11}}{\pi a}$$

x_{11} este prima rădăcină a ecuației $J_1(x) = 0$, deci $x_{11} \approx 2,4$

$f_{110} \approx 2,36$ GHz ; $\lambda_{110} \approx 0,13$ m ; $f_{111} \approx 2,72$ GHz ; $\lambda_{111} \approx 0,11$ m

$$TE_{111}: f_{111} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{l}\right)^2 + \left(\frac{x_{11}}{\pi a}\right)^2}$$

x_{11} este prima rădăcină a ecuației $J_1'(x) = 0$: $x_{11} \approx 1,84$

$$f_{111} \approx 2,32 \text{ GHz}; \ \lambda_{111} \approx 0,13 \text{ m}$$

TE_{101}: x_{01} este prima rădăcină a ecuației $J_0'(x) = 0$: $x_{01} \approx 3,83$

$$f_{101} \approx 3,86 \text{ GHz}; \ \lambda_{101} \approx 0,077 \text{ m}.$$

1.2. 1°. Pentru o undă monocromatică, ecuația undelor este

$$\Delta \bar{E} + K^2 \bar{E} = 0 \tag{1.2.1}$$

unde

$$K = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}.$$

Pentru cîmpul electric dorit

$$E_x = 0\,;\ E_y = 0\,;\ E_z = E_z(x,\ y), \tag{1.2.2}$$

ecuaţia (1.2.1) devine

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + K^2 E_z = 0. \tag{1.2.1'}$$

Substituind soluţia indicată

$$E_z(x,\ y) = X(x)\,Y(y) \tag{1.2.3}$$

în ecuaţia (1.2.1'), se obţine

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + K^2 = 0. \tag{1.2.4}$$

Soluţia generală este

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sin\,(K_1 x + \varphi_1) \\ Y &= A_2 \sin\,(K_2 x + \varphi_2) \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

şi ecuaţia (1.2.4) duce la condiţia

$$K_1^2 + K_2^2 = K^2. \tag{1.2.6}$$

Condiţiile pe pereţii unui conductor perfect sînt ca să se anuleze componenta tangenţială a lui E şi componenta normală a lui H, adică

$$\begin{aligned} X(0) &= X(L) = 0 \\ Y(0) &= Y(L) = 0. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Atunci, soluţiile (1.2.5) devin

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \\ Y &= A_2 \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

unde m şi n sînt întregi, care conform lui (1.2.6) satisfac relaţia

$$(m^2 + n^2)\frac{\pi^2}{L^2} = K^2 \tag{1.2.9}$$

sau

$$m^2 + n^2 = \frac{4L^2}{\lambda_0^2}. \tag{1.2.9'}$$

Frecvenţele proprii ale cavităţii, în modul considerat, corespund lungimilor de undă

$$\lambda_0 = \frac{2L}{\sqrt{m^2 + n^2}}. \tag{1.2.10}$$

Valoarea minimă a lui L se obţine pentru $m = n = 1$

$$L_m = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}. \tag{1.2.11}$$

Pentru $\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz şi $\lambda_0 = 10^{-2}$ m,

$$L_m = 0{,}0707 \text{ m}.$$

2°. Pentru $L = L_m$, cîmpul electric se exprimă prin

$$E_z = X \cdot Y = E_0 \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\cos \omega t. \tag{1.2.12}$$

Utilizînd ecuaţia lui Maxwell

$$\text{rot } \overline{E} = -\mu_0\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \tag{1.2.13}$$

componentele H_x şi H_y ale cîmpului magnetic, se obţin din

$$-\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{E_0}{\mu_0}\,\frac{\pi}{L}\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L}\cos \omega t \tag{1.2.14}$$

şi

$$-\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{E_0}{\mu_0}\,\frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\cos \omega t \tag{1.2.15}$$

adică

$$H_x = -\frac{E_0}{\mu_0}\frac{\pi}{L\omega}\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L}\sin\omega t =$$

$$= -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\mu_0}}\cdot E_0 \sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L}\sin\omega t \qquad (1.2.16)$$

şi

$$H_y = \frac{E_0\pi}{\mu_0 L\omega}\cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\sin\omega t =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\mu_0}} E_0 \cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\sin\omega t. \qquad (1.2.17)$$

Energia medie înmagazinată în cavitate se deduce din valoarea medie a densităţii de energie

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \qquad (1.2.18)$$

luată în timp. În cazul unei funcţii sinusoidale, avem

$$[E_z^2] = \frac{1}{2}E_0^2. \qquad (1.2.19)$$

Luînd, apoi, media în volum, avem

$$[E_z^2] = \frac{1}{2}E_0^2\frac{1}{L}\int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\,\frac{1}{L}\int_0^L \sin^2\frac{\pi y}{L}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\,\frac{E_0^2}{2} \qquad (1.2.20)$$

$$[H_x^2] = \frac{\varepsilon_0}{2\mu_0}\,\frac{E_0^2}{2}\,\frac{1}{4} \qquad (1.2.21)$$

$$[H_y^2] = \frac{\varepsilon_0}{2\mu_0}\,\frac{E_0^2}{2}\,\frac{1}{4}. \qquad (1.2.22)$$

Ţinînd seama de relaţiile (1.2.18), (1.2.19), (1.2.20), (1.2.21) şi (1.2.22), energia medie — în cavitate — va fi

$$[\mathscr{E}] = L^3\frac{E_0^2}{4}\left[\frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 L^3}{8}. \qquad (1.2.23)$$

Ţinînd seama de datele numerice avem

$$[\mathscr{E}] = \frac{10^{11}\cdot 10^{-1}}{8\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 9\cdot 10^{9}\cdot 2\cdot \sqrt{2}} \approx 0{,}04 \text{ J}. \qquad (1.2.24)$$

1.3. 1°. Deoarece pereţii nu sînt perfect conductori, cîmpul magnetic pătrunde în interiorul lor, dînd naştere unei densităţi de curent $\bar{J} = \text{rot}\,\bar{H}$ şi deci la pierderi Joule. Trebuie rezolvată problema de pătrundere a cîmpului magnetic într-un semispaţiu conductor (fig. 1.3R).

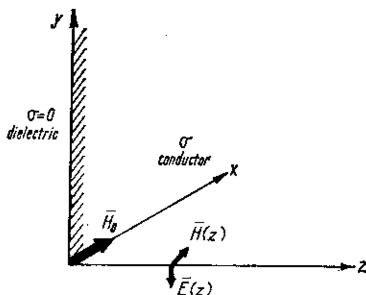


Fig. 1.3R

Cîmpul magnetic satisface ecuaţia

$$\Delta\bar{H} - i\,\omega\mu\sigma_e\,\bar{H} = 0. \qquad (1.3.1)$$

Se caută o soluţie de forma

$$\bar{H} = \bar{H}(z) = \bar{1}_x H(z).$$

Rezultă

$$\bar{H}(z) = \bar{H}_0 \exp[-\gamma z] \qquad (1.3.2)$$

$$\gamma^2 = i\,\omega\mu\sigma_e$$

$$\gamma = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma_e}{2}} = \alpha(1+i). \qquad (1.3.3)$$

Adîncimea de pătrundere

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_e}}. \qquad (1.3.4)$$

Rezultă cîmpul electric din conductor

$$\sigma_e\bar{E} = \text{rot}\,\bar{H}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{\sigma_e}\bar{1}_y\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z}$$

$$\bar{E} = -\frac{\gamma}{\sigma_e}H_0\exp[-\gamma z]\,\bar{1}_y. \qquad (1.3.5)$$

Fie o suprafaţă îndeajuns de mică, încît să putem considera cîmpul magnetic constant. Puterea disipată pe unitatea de volum

(pe aria considerată, între coordonatele z şi $z + \mathrm{d}z$) $\mathscr{P}_v$, rezultă din calculul mărimii vectorului Poynting

$$S = EH^* = \frac{\gamma}{\sigma_e} H_0^2 \exp[-2\alpha z] = \frac{\alpha(1+i)}{\sigma_e} H_0^2 \exp[-2\alpha z] \quad (1.3.6)$$

$$\mathscr{P}_v = \frac{1}{\delta\sigma_e} H_0^2 \exp[-2z/\delta]. \quad (1.3.7)$$

Puterea totală pierdută de oscilaţii pe unitatea de arie a pereţilor este mărimea vectorului Poynting la $z = 0$, rezultat care se obţine şi integrînd (1.3.7) de la 0 la ∞ (grosimea pereţilor este mult mai mare decît adîncimea de pătrundere)

$$\mathscr{P}_A = \frac{1}{\delta\sigma_e} H_0^2. \quad (1.3.8)$$

Rezultă imediat că modul dominant, căruia îi corespunde frecvenţa minimă, deci adîncimea de pătrundere maximă, va avea pierderile Joule cele mai mici. Neglijînd pierderile, în dielectric, se poate spune, pe baza acestei analize, că după încetarea excitării, modul care va persista cel mai mult timp este cel dominant

$\omega_{110} = 44{,}4$ GHz

$\delta_{110} = 2{,}46 \cdot 10^{-4}$ cm

$\mathscr{P}_A = 6{,}85$ W/cm^2 pentru TE_{110}.

Analog

$\mathscr{P}_A = 8{,}28$ W/cm^2 pentru TE_{111}

$\mathscr{P}_A = 7{,}78$ W/cm^2 pentru TE_{101}.

2°. Din definiţia factorului de calitate, dacă se notează cu $\mathscr{E}$ energia din cavitate, rezultă

$$Q = \frac{2\pi\mathscr{E}}{-\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} T} = \frac{\omega\mathscr{E}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\mathscr{E}}$$

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \exp\left[-\frac{\omega t}{Q}\right] \quad (1.3.9)$$

$$Q = 3{,}67 \cdot 10^5.$$

Energia modului dominant se reduce la a zecea parte din valoarea de regim în aproximativ 19 μs.

3°. Deoarece după încetarea excitării oscilațiile din cavitate sînt amortizate, ele nu mai sînt monocromatice, apărînd natural noțiunea de lărgime spectrală. Amplitudinea unei componente a cîmpului TE_{110} scade în timp după legea

$$E_{110}(t) \propto \sqrt{\mathscr{E}(t)} \cdot \exp[i\omega_{110} t] = k \exp\left[-\frac{\omega_{110} t}{2Q}\right] \exp[i\omega_{110} t] \quad (1.3.10)$$

unde k este o constantă.
Transformata Fourier este

$$G(\omega) = \frac{ik}{\omega_{110} - \omega + \frac{i\omega_{110}}{2Q}}. \qquad (1.3.11)$$

Se definește lărgimea liniei spectrale $\Delta\omega$ ca distanța între frecvențele la care $|G(\omega)|^2$ scade la jumătate față de valoarea sa maximă. Se obține

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{110}} = \frac{1}{Q} \qquad (1.3.12)$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{110}}{Q} = 121 \text{ kHz}.$$

1.4. 1°. Pornim de la definiția hamiltonianului cîmpului electromagnetic

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int (\varepsilon \bar{E}\,\bar{E} + \mu \bar{H}\,\bar{H})\,\mathrm{d}V \qquad (1.4.1)$$

și introducem dezvoltările din enunț

$$\bar{E} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_q p_q(t)\,\bar{E}_q(r)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_q \omega_q\, q_q(t)\,\bar{H}_q(r)$$

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int \left\{ \varepsilon \left[-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_q p_q(t)\,\bar{E}_q(r) \right]^2 + \mu \left[\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_q \omega_q\, q_q(t)\,\bar{H}_q(r) \right]^2 \right\} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_q p_q^2 + \omega_q^2 q_q^2. \qquad (1.4.2)$$

2°. Introducînd acest hamiltonian în ecuaţiile canonice ale lui **Hamilton** găsim ecuaţiile de evoluţie ale cîmpului electromagnetic, adică ecuaţiile lui **Maxwell**

$$\dot{q}_q = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_q} = p_q \tag{1.4.3}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_q \omega_q \dot{q}_q \bar{H}_q = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_q \omega_q \bar{H}_q \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_q} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_q \omega_q p_q \bar{H}_q \tag{1.4.4}$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_q p_q \nabla \times \bar{E}_q = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_q \omega_q \frac{n_r}{c} \bar{H}_q \tag{1.4.5}$$

In relaţia (1.4.5) am folosit faptul că $\bar{E}_q(r)$ şi $\bar{H}_q(r)$ formează un set infinit discret de valori (moduri normale) care verifică ecuaţia lui **Maxwell**

$$\nabla \times \bar{E}_q = \frac{\omega_q n_r}{c} \bar{H}_q$$

$$\nabla \times \bar{H}_q = \frac{\omega_q n_r}{c} \bar{E}_q . \tag{1.4.6}$$

Din (1.4.1) şi (1.4.2), folosind (1.4.3)—(1.4.5), rezultă

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{d\bar{H}}{dt} . \tag{1.4.7}$$

Asemănător se arată şi

$$\nabla \times \bar{H} = \varepsilon \frac{d\bar{E}}{dt} . \tag{1.4.8}$$

1.5. Folosind notaţiile din figura 1.5, b, un obiect punctiform localizat pe axă la o distanţă x_0 la stînga focarului anterior F_0 al lentilei S_0 va avea imaginea formată la o distanţă x_0' la dreapta lui F_0'. Conform relaţiei lui Newton din optica geometrică avem

$$\frac{1}{x_0 + 1} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1} \quad \left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0'} = \frac{1}{f_0} \right) \tag{1.5.1}$$

sau

$$y = \frac{x_0 + 1}{x_0}, \text{ iar } x_0' = y - 1 = \frac{x_0 + 1}{x_0} - 1 = \frac{1}{x_0} . \tag{1.5.2}$$

Notînd cu α distanța dintre focarele F'_{i-1} și F_i, imaginea prin S_0 se va afla la distanța

$$x_1 = \alpha - \frac{1}{x_0} \tag{1.5.3}$$

la stînga lui F_1.

Repetînd acest raționament și pentru lentilele următoare S_1, $S_2, \ldots, S_n$ obținem o relație de recurență de forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha - \frac{1}{x_0} \\ x_2 &= \alpha - \frac{1}{x_1} \\ x_3 &= \alpha - \frac{1}{x_2} \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= \alpha - \frac{1}{x_{n-1}} \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

sau

$$\frac{1}{x_n} = \cfrac{1}{\alpha - \cfrac{1}{\alpha - \cfrac{1}{\alpha - \cfrac{1}{\alpha - \ldots \cfrac{1}{\alpha - \cfrac{1}{x_0}}}}}} \tag{1.5.5}$$

unde α apare de n ori.

Pentru ca sistemul de n lentile să fie afocal punem în relația (1.5.5) condiția ca

$$x_0 = x_n = \infty \tag{1.5.6}$$

şi obţinem ecuaţia

$$0 = \cfrac{1}{\alpha - \cfrac{1}{\alpha \ddots \cfrac{1}{\alpha}}} \qquad (1.5.7)$$

Această ecuaţie are $n-1$ soluţii distincte de forma

$$\alpha = 2 \cos\left(\frac{r}{n}\pi\right) \qquad (1.5.8)$$

unde $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Din relaţia (1.5.8) se observă că dacă

$$|\alpha| > 2 \text{ (în unităţi } f) \qquad (1.5.9)$$

nu există valori ale lui r şi n care să satisfacă ecuaţia (1.5.8).

Dacă

$$|\alpha| \leqslant 2 \qquad (1.5.10)$$

atunci există o pereche de numere întregi r şi n care satisface ecuaţia (1.5.8). În acest din urmă caz obţinem un sistem afocal cu n lentile consecutive. Chiar dacă o astfel de pereche nu există, deoarece fracţia r/n poate aproxima un număr iraţional oarecare, putem trage concluzia că un sistem fizic oarecare care satisface condiţia (1.5.10) este practic un sistem afocal cu n lentile, cu condiţia ca n să fie făcut suficient de mare.

1.6. Între cele două oglinzi ale interferometrului Fabry-Pérot (fig. 1.6 R,a)

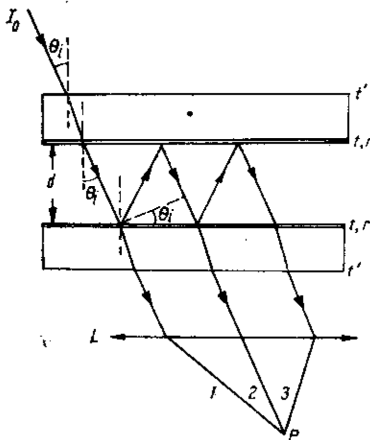


Fig. 1.6 R,a.

au loc reflexii multiple astfel încît apar o mulţime de raze emergente care interferă în planul focal al unei lentile convergente. Figura de interferenţă va consta din inele de egală înclinare.

Notînd cu I_0 intensitatea luminii care cade pe dispozitiv, r—coeficientul de reflexie al oglinzilor semitransparente, t—coeficientul de transmisie al lor, iar t'—coeficientul de transmisie al plăcilor de sticlă, la ieşirea din interferometru intensităţile razelor succesive vor fi

$$I_1 = I_0 t^2 t'^2, \;\; I_2 = I_0 t^2 t'^2 r^2, \;\; I_3 = I_0 t^2 t'^2 r^4, \; \ldots \tag{1.6.1}$$

sau notînd $A = \sqrt{I_0 t^2 t'^2}$ amplitudinea primei raze atunci amplitudinile undelor succesive vor fi

$$A, \; Ar, \; Ar^2, \ldots \tag{1.6.2}$$

Notînd d distanţa dintre oglinzile interferometrului, diferenţa de drum dintre două raze succesive va fi

$$\delta = \frac{2d}{\cos\theta_i} - 2d \operatorname{tg}\theta_i \sin\theta_i = \frac{2d}{\cos\theta_i}(1 - \sin^2\theta_i) = 2d\cos\theta_i \tag{1.6.3}$$

în cazul în care $n_r \simeq 1$.

Deci, defazajul relativ va fi:

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi d \cos\theta_i}{\lambda} = \frac{2\omega d}{c}\cos\theta_i. \tag{1.6.4}$$

Rezultatul suprapunerii acestor unde este

$$Y = A\exp[i\omega t] + Ar\exp[i(\omega t - \varphi)] + Ar^2\exp[i(\omega t - 2\varphi)] + \ldots \tag{1.6.5}$$

Presupunînd suprafaţa oglinzilor suficient de mare, expresia de mai sus reprezintă o serie geometrică cu raţia $r\exp[-i\varphi] < 1$ deci

$$Y = \frac{A\exp[i\omega t]}{1 - r\exp[-i\varphi[}. \tag{1.6.6}$$

Intensitatea rezultantă într-un punct din planul focal al lentilei va fi

$$I = Y\,Y^* = \frac{A^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\varphi}{2}} \qquad (1.6.7)$$

care poartă numele de relația Airy.

Relația (1.6.7) mai poate fi scrisă

$$I = \frac{A^2}{(1-r)^2\left[1 + \frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]} = \frac{I_{max}}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}} \qquad (1.6.8)$$

unde $I_{max} = \frac{A^2}{(1-r)^2}$ este valoarea maximă obținută pentru cazul cînd $\varphi = 2n\pi$ echivalent cu condiția

$$\cos\,\theta_i = \frac{n\lambda}{2d} \qquad (1.6.9)$$

unde n este un număr întreg, pozitiv, care poartă numele de ordin de interferență.

1°. Observăm că în cazul problemei, $\theta_i = 0$ deci din ecuația (1.6.9) obținem pentru ordinul de interferență la centru

$$n = \frac{2d}{\lambda}. \qquad (1.6.10)$$

Pentru ca să nu apară suprapunerea spectrelor de ordine diferite trebuie ca lărgimea benzii spectrale, $\Delta\lambda$, incidente pe interferometru, să nu depășească limita dată de condiția

$$n - 1 = \frac{2d}{\lambda + \Delta\lambda}. \qquad (1.6.11)$$

Ecuația (1.6.11) împreună cu (1.6.10) conduc la condiția

$$\frac{n\Delta\lambda}{\lambda} \leqslant 1 \qquad (1.6.12)$$

care se poate scrie

$$\Delta\omega \leqslant \frac{\pi c}{d} \tag{1.6.13}$$

unde $\Delta\omega$ este intervalul maxim de frecvență iar c viteza luminii în vid.

Lărgimea benzii de frecvență a radiației laser incidente va fi dată de

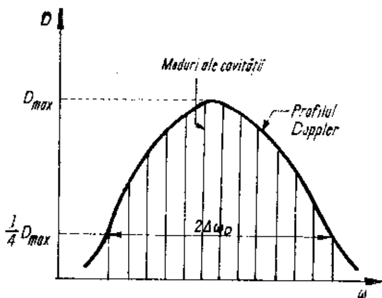


Fig. 1.6 R,b.

$$2\Delta\omega_0 = \frac{2\omega}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 4}{m}} \simeq$$

$$\simeq 8{,}1\cdot 10^{9}\ \mathrm{s}^{-1} \tag{1.6.14}$$

unde $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ J/°K este constanta lui Boltzmann.

Deoarece separarea între două moduri longitudinale succesive este $\omega_{q,q+1} = \frac{\pi c}{l} = 2\pi\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}^{-1}$ înseamnă că va exista oscilație pe 13 moduri longitudinale (fig. 1.6 R, b).

Din ecuația (1.6.13) folosind lărgimea de bandă dată de (1.6.14) obținem

$$d \leqslant \frac{\pi c}{2\Delta\omega_D} = \frac{3\cdot 10^{8}}{2{,}6\cdot 10^{9}} = 11{,}5\ \text{cm}.$$

2°. Pentru rezolvare revenim la expresia (1.6.8). Observăm că intensitatea se va reduce la $\frac{I_{max}}{2}$ pentru un defazaj care diferă de $\varphi = 2n\pi$, cu o cantitate mică ε, anume, pentru

$$\frac{l}{2} = n\,\pi \pm \varepsilon, \tag{1.6.15}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin(n\pi \pm \varepsilon) = \pm\sin\varepsilon \approx \pm\varepsilon \tag{1.6.16}$$

Introducînd (1.6.16) în (1.6.8)

$$\frac{I_{max}}{2} = \frac{I_{max}}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \varepsilon^2} \tag{1.6.17}$$

de unde

$$\varepsilon = \frac{1-r}{2\sqrt{r}}. \tag{1.6.18}$$

În cazul unghiului de incidență constant ($\theta_i = 0$) variația ε a defazajului apare datorită variației frecvenței, deci putem scrie

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{d\omega} \Delta\omega_t \tag{1.6.19}$$

unde $\Delta\omega_t$ va reprezenta semilărgimea benzii de trecere. Diferențiind ecuația (1.6.4) și egalînd cu ecuația (1.6.18) obținem

$$\Delta\omega_t = \frac{(1-r)c}{4d\sqrt{r}}. \tag{1.6.20}$$

Lărgimea benzii de trecere va fi dublul mărimii $\Delta\omega_t$

$$2\Delta\omega_t = \frac{(1-r)c}{2d\sqrt{r}} \approx 2\pi \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \tag{1.6.21}$$

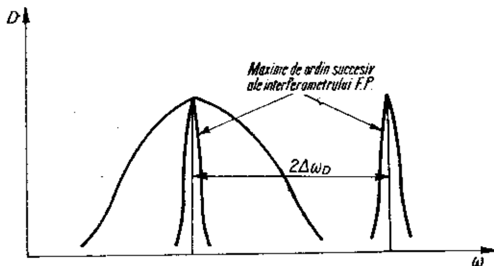


Fig. 1.6. R,c

Observăm că banda de trecere este mult mai îngustă decît intervalul de frecvențe incidente (1.6.14).

În concluzie, dacă un maxim al radiației emergente se află în dreptul maximului curbei Doppler (fig. 1.6. R, c) următorul se află

la distanța 2 $\Delta\omega_D$ dată de (1.6.14) deci în afara profilului, astfel fiind selectat modul central.

1.7. Considerăm un punct M curent de cotă z din interiorul interferometrului Fabry-Pérot (fig. 1.7 R). În cazul în care interferometrul este iluminat cu o undă plană monocromatică sub incidența θ_i, în punctul M se întîlnesc un ansamblu de raze care se pot grupa în două serii Airy (problema 1.6.) distincte:

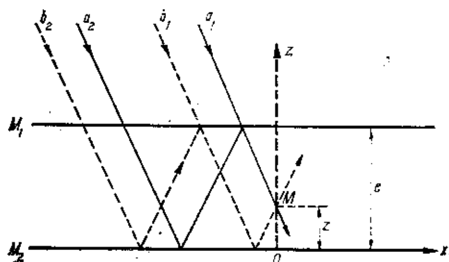


Fig. 1.7. R.

1°. O serie provenind de la razele incidente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ etc. (indicate în figură cu linii pline) care în punctul M posedă amplitudinile $t, tr^2, tr^4, \ldots$ etc. și care dau naștere în M la o vibrație rezultantă de amplitudine:

$$a = \frac{t}{1 - r^2} \, [A_y(\theta_i)]^{1/2} \tag{1.7.1}$$

unde t este coeficientul de transmisie al oglinzilor M_1 și M_2, r — coeficientul de reflexie al oglinzilor M_1 și M_2, $A_y(\theta_i)$ funcția lui Airy.

2°. O serie provenind de la razele reflectate b_1, b_2, $b_3 \ldots$ etc. (indicate pe figură cu linii punctate) care în M posedă amplitudinile $tr, tr^3, tr^5, \ldots$ etc. și care dau naștere în M la o oscilație rezultantă cu amplitudinea

$$b = \frac{t}{1 - r^2} \, [A_y(\theta_i)]^{1/2}. \tag{1.7.2}$$

Oscilațiile rezultante cu amplitudinile (1.7.1) și (1.7.2) prezintă în punctul M o diferență de fază

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} \, 2n_r \, z \cos\theta_i + \text{const.} \tag{1.7.3}$$

unde n_r este indicele de refracţie al mediului din interiorul interferometrului.

Dacă presupunem că înclinarea θ_i este suficient de mică pentru ca să putem considera oscilaţia rezultantă din compunerea celor 2 oscilaţii paralele de amplitudine (1.7.1) şi (1.7.2), rezultă intensitatea :

$$I = (a - b)^2 + 4ab \cos^2 \frac{\psi}{2} \cdot \qquad (1.7.4)$$

Relaţia (1.7.4) mai poate fi scrisă şi sub forma

$$I \approx I_{min} + I_{max} \cos^2 \frac{\psi}{2} \qquad (1.7.5)$$

unde

$$I_{min} = (a-b)^2 = \left[\frac{t(1-r)}{1-r^2}\right] A_y(\theta_i) = \left(\frac{t}{1+r}\right)^2 A_y(\theta_i) = \frac{1-r}{1+1} A_y(\theta_i) \quad (1.7.6)$$

şi

$$I_{max} = 4ab = \frac{4t^2 r}{(1-r^2)^2} A_y(\theta_i) = \frac{4\mathscr{T}\sqrt{\mathscr{R}}}{(1-\mathscr{R})^2} A_y(\theta_i) = \frac{3\sqrt{\mathscr{R}}}{1-\mathscr{R}} A_y(\theta_i). \quad (1.7.7)$$

Din (1.7.6) şi (1.7.7) se observă că

$$\frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{(1-r)^2}{4r} \cdot \qquad (1.7.8)$$

În exemplul nostru în care oglinzile au un coeficient de reflexie $r = 0{,}97$ avem $\mathscr{R} = r^2 = 0{,}94$ şi $\mathscr{T} = 1 - \mathscr{R} = 0{,}06$ iar $1 - r = 0{,}03$ relaţia (1.7.8) duce la valoarea

$$\frac{I_{min}}{I_{max}} \approx 2 \cdot 10^{-4}. \qquad (1.7.9)$$

Relaţia (1.7.9) arată că I_{min} poate fi neglijat în raport cu I_{max} şi relaţia (1.7.5) se poate scrie

$$I = I_{max} \cos^2 \frac{\psi}{2} = \frac{4\sqrt{\mathscr{R}}}{1-\mathscr{R}} \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cos^2 \frac{\psi}{2} \qquad (1.7.10)$$

în care remarcăm că $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_r e \cos \theta_i$ nu depinde decît de variabila θ_i, iar ψ dat de relația (1.7.3) depinde de variabilele θ_i și z. Cu m am notat expresia $\frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2}$ care poată numele de finețea franjelor.

Pentru o undă plană monocromatică cu incidență θ_i, distribuția de intensitate în interiorul interferometrului va fi deci

$$I = I_{max} \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} 2n_r\, z \cos \theta_i\right). \tag{1.7.11}$$

Relația (1.7.11) arată că în intervalul dintre cele 2 oglinzi ale interferometrului lumina este repartizată sub formă de franje de grosime

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2n_r \cos \theta_i}. \tag{1.7.12}$$

1°. Cînd înclinarea θ_i este aleasă astfel încît să avem

$$2n_r e \cos \theta_i = k\lambda \quad \text{și} \quad A_y(\theta_i) = 1 \tag{1.7.13}$$

obținem intensitatea maximă a franjelor sub forma

$$I_1 = \frac{4\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}} \approx 64. \tag{1.7.14}$$

Deci, în cazul unei incidențe care corespunde unui acord de fază între razele care sosesc într-un punct dat, există în interiorul interferometrului zone unde intensitatea luminoasă este mult mai mare ca în unda incidentă.

Intensitatea luminoasă medie în interiorul interferometrului se obține făcînd

$$\overline{\cos^2 \frac{\psi}{2}} = \frac{1}{2}. \tag{1.7.15}$$

Ținînd cont de relațiile (1.7.13) și (1.7.10) obținem intensitatea medie în interiorul interferometrului

$$\bar{I}_1 = \frac{4\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}}\, \overline{\cos^2 \frac{\Psi}{2}} = \frac{2\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}} \approx 32 \tag{1.7.16}$$

adică amplificarea luminoasă globală în interiorul interferometrului este încă considerabil de mare în raport cu intensitatea undei incidente.

Interferometrul Fabry-Pérot realizează deci, o acumulare considerabilă de fluxuri luminoase, în interiorul său, dar trebuie să notăm că această înmagazinare de lumină nu se produce decît pentru incidență a razelor în acord de fază.

2.° Cînd incidența are loc la un unghi, $\theta_{i\,min}$, care corespunde unui minim (antifază între raze) funcția lui Airy are valoarea

$$A_y(\theta_{i\,min}) = \frac{1}{1+m} = \left(\frac{1-\mathscr{R}}{1+\mathscr{R}}\right)^2 \approx 10^{-3} \qquad (1.7.17)$$

deoarece, în acest caz, $2n_r\, e \cos\, \theta_i = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$ și deci $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1$

iar $A_y(\theta_i) = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ devine $A_y(\theta_{i\,min}) = \frac{1}{1+m}$ unde $m = \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}$.

Relația (1.7.17) arată că la o incidență corespunzătoare relației $2ne \cos\, \theta_i = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$ avem o considerabilă scădere a intensității luminoase în interior. Pentru aceste incidențe, energia fasciculului incident este în mare parte reflectată și nu pătrunde în interiorul aparatului.

1.8. Fie O_1 și O_2 suprafețele reflectătoare ale oglinzilor interferometrului, iar e distanța dintre acestea (fig. 1.8 R). Dacă presupunem că unda incidentă pe O_1 are intensitatea $I_{\theta_i} = 1$ și stratul reflectător are absorbția neglijabilă, atunci intensitatea fasciculului reflectat, pe care o notăm cu $\mathscr{R}$, adunată cu intensitatea fasciculului transmis, notată cu $\mathscr{T}$, trebuie să satisfacă relația

$$\mathscr{R} + \mathscr{T} = 1. \qquad (1.8.1)$$

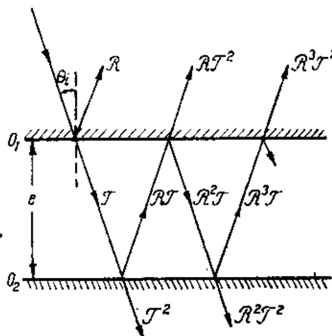


Fig. 1.8 R

Este evident că $\mathcal{R}$ și $\mathcal{T}$ pot fi priviți ca niște factori de multiplicare (subunitari) ai intensităților fasciculelor luminoase transmise și reflectate de cei doi reflectori O_1 și O_2. Acestor factori le corespund coeficienții de multiplicare a amplitudinilor dați de relațiile

$$r = \sqrt{\mathcal{R}} \quad \text{și} \quad t = \sqrt{\mathcal{T}}. \tag{1.8.2}$$

Din figură se observă că atunci cînd interferometrul este iluminat cu o undă plană monocromatică, de forma sin ωt, cu incidența θ_i, se obține prin transmisie o serie de unde ale căror faze sînt în progresie aritmetică. Diferența de fază φ între două unde succesive este

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_r\, e \cos \theta_i \tag{1.8.3}$$

unde n_r este indicele de refracție al mediului dintre O_1 și O_2. Amplitudinile acestor unde transmise formează o progresie geometrică descrescătoare

$$t^2,\ t^2r^2,\ t^2r^4, \ldots \tag{1.8.4}$$

Intensitatea emergentă I obținută prin însumarea tuturor undelor transmise cu amplitudinile date de (1.8.4) și cu diferența de fază dintre două fascicule succesive, se exprimă în funcție de unghiul de incidență θ_i prin relația (vezi problema precedentă)

$$I = I_0\, A_y\, (\theta_i) \tag{1.8.5}$$

$$\text{unde } I_0 = \left(\frac{t^2}{1 - r^2}\right)^2 = \frac{\mathcal{T}^2}{(1 - \mathcal{R})^2} \quad \text{și} \quad A_y\,(\theta_i) = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

și poartă numele de funcția lui Airy. Coeficientul m poartă numele de coeficient de finețe și are expresia

$$m = \frac{4\mathcal{R}}{(1 - \mathcal{R})^2}. \tag{1.8.6}$$

Din relaţia (1.8.5) observăm că dacă $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0$ sau

$\sin^2 \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda} 2n_r\, e \cos\theta_i\right) = 0$ avem $A_y(\theta_i) = 1$ şi $I = I_0 = \frac{\mathscr{T}^2}{(1-\mathscr{R})^2}$

Cum nu avem absorbţie, $\mathscr{T} = 1 - \mathscr{R}$ şi deci $I = \frac{(1-\mathscr{R})^2}{(1-\mathscr{R})^2} = 1$, adică intensitatea fasciculului emergent este egal cu intensitatea fasciculului incident dacă este satisfăcută relaţia

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda} 2n_r\, e \cos\theta_i\right) = k\pi \quad \text{sau}$$
$$2n_r\, e \cos\theta_i = k\lambda \tag{1.8.7}$$

care constituie tocmai condiţia de maxim de interferenţă.

Condiţia de minim de interferenţă se exprimă prin relaţia

$$2n_r\, e \cos\theta_i = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{1.8.8}$$

care duce la condiţia

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1\,. \tag{1.8.9}$$

Ţinînd cont de (1.8.9) în relaţia (1.8.5) obţinem

$$I = \frac{\mathscr{T}^2}{(1-\mathscr{R})^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}} = \frac{\mathscr{T}^2(1-\mathscr{R})^2}{(1-\mathscr{R})^2\,[(1-\mathscr{R})^2 + 4\mathscr{R}]} =$$
$$= \frac{\mathscr{T}^2}{(1+\mathscr{R})^2} = \frac{(1-\mathscr{R})^2}{(1+\mathscr{R})^2}\,. \tag{1.8.10}$$

Relaţia (1.8.10) arată că intensitatea minimului este cu atît mai mică cu cît $\mathscr{R}$ este mai mare.

Raportul $\frac{I_{max}}{I_{min}}$ se obține din relațiile (1.8.6′) și (1.8.10), adică

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{1}{\frac{(1-\mathscr{R})^2}{(1+\mathscr{R})^2}} = \frac{(1+\mathscr{R})^2}{(1-\mathscr{R})^2} = \frac{1+0{,}94)^2}{(1-0{,}94)^2} \approx 10^2.$$

1.9. 1°. Din problema (1.6) se știe că intensitatea emergentă are expresia

$$I = I_0 \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \tag{1.9.1}$$

$$\text{unde } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_r e \cos \theta_i \text{ (fig. 1.9, a).} \tag{1.9.2}$$

Acord de fază înseamnă că $\varphi = 2k\pi$ deci

$$I = I_0 \frac{1}{1 + m \sin^2\pi} = I_0. \tag{1.9.3}$$

Înseamnă că toată intensitatea incidentă a fost transmisă și rezonatorul joacă rolul unui strat antireflectător.

2°. Pentru a studia distribuția fazei în franjele din interiorul rezonatorului reprezentăm cele două vibrații rezultante *a* și *b* ce se întîlnesc în punctul *M* (fig. 1.7R), prin expresiile

$$A \cos \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)}{c/n_r} \right) \tag{1.9.4}$$

și

$$B \cos \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_i + z \cos \theta_i}{c/n_r} \right) \tag{1.9.5}$$

unde c este viteza luminii în vid, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ frecvența undei și unde

$$A = \frac{t}{1 - r^2} [A_y(\theta_i)]^{1/2} \tag{1.9.6}$$

$$B = \frac{tr}{1 - r^2} [A_y(\theta_i)]^{1/2}. \tag{1.9.7}$$

Pentru un factor de reflexie $\mathcal{R} = 0{,}94$, deci $r = \sqrt{\mathcal{R}} = 0{,}97$. se vede că $\frac{B}{A} = r = 0{,}97$, ceea ce ne permite să neglijăm diferența dintre amplitudinile A și B și oscilația rezultantă C devine

$$C = A \cos \omega\left(t - \frac{x \sin \theta_i - z \cos \theta_i}{c/n_r}\right) +$$

$$+ B \cos \omega\left(t - \frac{x \sin \theta_i + z \cos \theta_i}{c/n_r}\right)$$

$$\approx 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_r z \cos \theta_i\right) \cos \omega\left(t - \frac{n_r x \sin \theta_i}{c}\right). \quad (1.9.8)$$

Se vede că faza rezultantă

$$\varphi = \frac{n_r x \sin \theta_i}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} n_r x \sin \theta_i \quad (1.9.9)$$

nu depinde decît de coordonata x.

Faza rezultantă rămîne constantă de-a lungul lui Oy și Oz, dar de la o franjă la alta argumentul din amplitudine, egal cu $\frac{2\pi}{\lambda} n_r z.$ $\cos \theta_i$ își schimbă semnul, ceea ce e echivalent cu o modificare bruscă de fază cu π. Deci faza e constantă și independentă de cota z în interiorul unei franje, dar două franje consecutive vibrează în opoziție de fază :

a) Dacă fasciculul incident e normal pe suprafața reflectătoare ($\theta_i = 0$, $\sin \theta_i = 0$) faza rămîne constantă de-a lungul axei Ox. Toate punctele din interiorul volumului unei franje de interferență vibrează în fază și unda din interiorul rezonatorului Fabry-Pérot constituie o undă staționară.

b) Dacă incidența θ_i e diferită de zero, faza variază lent într-o franjă de-a lungul lui Ox, viteza de fază de-a lungul acestei axe fiind

$$V = \frac{c}{n_r \sin \theta_i}. \quad (1.9.10)$$

Energia undei se propagă de-a lungul lui Ox ca într-un ghid de undă.

1.10. 1°. Luăm un punct P, avînd cota z (fig. 1.10 R) şi considerăm că un element de volum dV conţine NdV, atomi emiţători. Evaluăm intensitatea luminoasă radiată în exteriorul rezonatorului prin faţa inferioară, sub incidenţa θ_i faţă de planul xOz. Intensitatea luminoasă emisă de un atom o considerăm izotropă şi de valoare egală cu unitatea.

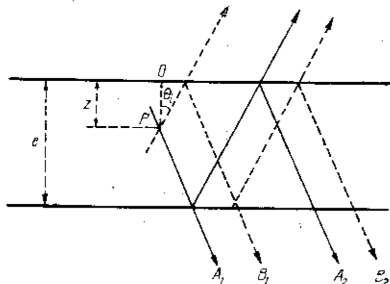


Fig. 1.10 R

Lumina radiată de elementul de volum dă naştere la două suite de raze emergente, care au amplitudinile în relaţia (problema 1.6)

$$A : t,\ tr^2,\ tr^4 \ldots \text{ etc.} \tag{1.10.1}$$

$$B : tr,\ tr^3,\ tr^5, \text{ etc.} \tag{1.10.2}$$

iar amplitudinile rezultante ale celor două suite sînt

$$A = N\ \mathrm{d}V \frac{t}{1 - r^2} [A_y(\theta_i)]^{1/2}$$

$$B = N\ \mathrm{d}V \frac{tr}{1 - r^2} [A_y(\theta_i)]^{1/2}. \tag{1.10.3}$$

Între aceste vibraţii rezultante apare o diferenţă de fază

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_r z \cos \theta_i + \text{const.} \tag{1.10.4}$$

Intensitatea rezultantă e dată de expresia

$$\mathrm{d}I = \left[(A - B)^2 + 4AB \cos^2 \frac{\psi}{2}\right] N\ \mathrm{d}V \tag{1.10.5}$$

În cazul acordului de fază $\frac{2\pi}{\lambda}\ 2n_r e \cos i = 2\ k\pi$, termenul al doilea se anulează.

Deci strălucirea $\mathscr{S}$ pentru incidența θ_i devine

$$\mathscr{S}(\theta_i) = \frac{2\sqrt{\mathscr{R}}}{1-\mathscr{R}} Ne \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \tag{1.10.11}$$

Rezultă că, dacă spațiul din interiorul rezonatorului e umplut cu atomi ce emit lumină în mod uniform, apare un sistem de inele de interferență în lumina emergentă, a căror distribuție a intensității în funcție de unghiul de incidență e dată de funcția lui Airy.

Dacă fețele terminale nu ar fi reflectătoare, strălucirea uniformă a mediului ar fi

$$\mathscr{S}_0 \cdot S = \int_V N\ \mathrm{d}V = NSe. \tag{1.10.12}$$

Putem scrie mărimea $\mathscr{S}(\theta_i)$ sub forma

$$\mathscr{S}(\theta_i) = \mathscr{S}_0 \frac{2\sqrt{\mathscr{R}}}{1-\mathscr{R}} \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \tag{1.10.13}$$

și pentru acordul de fază $\varphi = 2\ k\ \pi$, obținem valoarea maximă a lui $\mathscr{S}(\theta_i)$

$$\mathscr{S}(\theta_i)_{max} = \mathscr{S}_0 \frac{2\sqrt{\mathscr{R}}}{1-\mathscr{R}} = \mathscr{S}_0 \frac{2 \cdot \sqrt{0{,}94}}{1 - 0{,}94} = 32\ \mathscr{S}_0. \tag{1.10.14}$$

2°. Definim strălucirea medie, ca

$$\bar{\mathscr{S}} = \frac{\int \mathscr{S}(\theta_i)\ \mathrm{d}\Omega}{\Delta\Omega} \tag{1.10.15}$$

unde $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\ \theta_i\, \mathrm{d}\theta_i = 2\pi\, \mathrm{d}\,(\cos\ \theta_i) = \mathrm{const.}\, \mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ (1.10.16)
este elementul de unghi solid.

Atunci

$$\bar{\mathscr{S}} = \frac{\int \mathscr{S}(\theta_i)\, \mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\Delta\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \qquad (1.10.17)$$

Media, peste intervalul unghiular al unui inel, este $\Delta\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pi$ şi :

$$\bar{\mathscr{S}} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathscr{S}(\theta_i)\, \mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\pi} = \frac{2\sqrt{\mathscr{R}}\,\mathscr{S}_0}{(1-\mathscr{R})\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \qquad (1.10.18)$$

Integrala se calculează ştiind că

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \qquad (1.10.19)$$

Integrala din expresia lui $\mathscr{S}$ devine

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 + m\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1 + \frac{m}{2}(1 - \cos\varphi)} = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(m+2) - m\cos\varphi} =$$

$$= 2\left[\frac{2}{\sqrt{4+4m}} \operatorname{arctg} \frac{(2m+2)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4+4m}}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{m+1}} \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{\sqrt{m+1}}. \qquad (1.10.20)$$

Strălucirea medie va fi

$$\bar{\mathscr{S}} = \frac{2\sqrt{\mathscr{R}}\,\mathscr{S}_0}{(1-\mathscr{R})\pi} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2} + 1}} = \mathscr{S}_0 \frac{2\sqrt{\mathscr{R}}}{1+\mathscr{R}} = \mathscr{S}_0 \frac{2\cdot 0{,}97}{1 + 0{,}94} \approx \mathscr{S}_0.$$

Se vede că energia totală se conservă, rămînînd aceeași ca și în cazul absenței fețelor reflectătoare.

1.11.

1°. $$t_f = \frac{nl}{(1-\mathcal{R})\,c} = \frac{1\cdot 1}{(1-0{,}98)\cdot 3\cdot 3.10^8} = 1{,}67\cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

$$Q = \omega t = \frac{2\pi l}{(1-\mathcal{R})\,\lambda} \approx \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1}{(1-0{,}98)\cdot 6{,}328\cdot 10^{-7}} = 4{,}96\cdot 10^8$$

2°. $$q = \frac{l}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{l}{\frac{6{,}328\cdot 10^{-7}}{2}} \approx 3{,}16\cdot 10^6.$$

Pornind de la expresia care dă frecvența de rezonanță a cavității

$$\omega_c = \frac{\pi c}{n}\left[\left(\frac{q}{l}\right)^2 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2 + \left(\frac{s}{2a}\right)^2\right]^{1/2}$$

q, r, s fiind numere întregi, obținem

$$\omega_{q,\,q+1} = \frac{\pi c}{nl} = \frac{3\pi\cdot 10^8}{1\cdot 1} = 3\cdot\pi\cdot 10^8\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Se observă că

$$\omega_{q,\,q+1} = 3\pi\cdot 10^8 \gg \frac{2\pi}{t_f} = 12\pi\cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Modurile axiale succesive sînt discrete. Dacă semilărgimea liniei tranziției atomice utilizate este mai mică decît $\frac{\pi c}{nl}$, este posibil să se selecteze un singur mod axial într-o oscilație.

3°. $$r = \frac{8a^2(1-\mathcal{R})}{\lambda l} = \frac{8(5\cdot 10^{-3})^2\,(1-0{,}98)}{6{,}328\cdot 10^{-7}\cdot 1} = 6{,}32.$$

De asemenea, avem

$$\omega_{r,r+1} = c\ \frac{\pi\left(r+\dfrac{1}{2}\right)l}{4nqa^2} = 3\cdot10^8\ \frac{2\pi\left(6{,}32+\dfrac{1}{2}\right)l}{8\cdot1\cdot3{,}16\cdot10^6\ (5\cdot10^{-3})^2} \approx 2\cdot10^7\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Se observă că

$$\omega_{r,r+1} = 2\cdot10^7 < \frac{2\pi}{t_f} \approx 4\cdot10^7\ \mathrm{s}^{-1}.$$

4°.
$$s = r = 6{,}32 \to 6$$

$$\omega_c = \frac{\pi c}{n}\left[\left(\frac{q}{l}\right)^2 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2 + \left(\frac{s}{2a}\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{\pi\cdot3\cdot10^8}{1}\left[\left(\frac{3{,}16\cdot10^6}{1}\right)^2 + 2\left(\frac{6}{10^{-3}}\right)^2\right]^{1/2} \approx 3\cdot10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Se obține — în primă aproximație — același rezultat din

$$\omega_L = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{3\cdot10^8}{10^{-7}} \approx 3\cdot10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

1.12. 1°. Se stabilesc ușor relațiile (fig. 1.12 R)

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \theta d \qquad & \theta_{i2} &= -\theta \\ y_2 &= y_1 + \Phi d \qquad & \Phi_{i2} &= -\Phi. \end{aligned} \tag{1.12.1}$$

Legătura între coordonatele punctelor P_1 și P_2 va fi dată de

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_{i2} \end{pmatrix} = T_x^{12}\begin{pmatrix} x_1 \\ \theta \end{pmatrix}\ \text{și}\ \begin{pmatrix} y_2 \\ \Phi_{i2} \end{pmatrix} = T_y^{12}\begin{pmatrix} y_1 \\ \Phi \end{pmatrix} \tag{1.12.2}$$

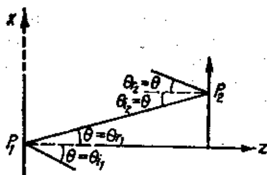


Fig. 1.12 R

de unde prin identificarea cu (1.12.1) rezultă

$$T_x^{12} = T_y^{12} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.12.3}$$

Pentru deducerea matricelor de reflexie observăm că, în urma reflexiei obţinem

$$\begin{matrix} x_2 = x_2 & & y_2 = y_2 \\ & \text{şi} & \\ \theta_{r2} = -\theta & & \Phi_{r2} = -\Phi. \end{matrix} \tag{1.12.4}$$

Pornind de la relaţiile de definiţie a matricelor, date în enunţ, găsim

$$R_x = R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R. \tag{1.12.5}$$

În mod asemănător se obţin matricele de transfer de la oglinda O_2 la O_1, T_x^{21}, T_y^{21}

$$T_x^{21} = T_y^{21} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.12.6}$$

$$2°.\mathscr{B} = RT^{12}\,RT^{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.12.7}$$

şi

$$\mathscr{B}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2nd \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.12.8}$$

3°. Condiţia de stabilitate se deduce din analiza matricei $\mathscr{B}^n$. Deoarece prin diagonalizarea unei matrici, urma şi determinantul său rămîn invariante, diagonalizăm matricea $\mathscr{B}^n$, folosind matricea de transformare A

$$\mathscr{B}_d^n = A^{-1}\mathscr{B}^n A. \tag{1.12.9}$$

$$\mathscr{B}_d^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{1.12.10}$$

Valorile proprii al lui $\mathscr{B}^n$, λ_1 şi λ_2 sînt date de ecuaţia

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$$

unde

$$\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\beta = \lambda_1 \cdot \lambda_2. \tag{1.12.11}$$

Se observă că pentru a menţine pe $|x|$, $|y|$, $|\Phi|$, $|\theta|$ la valorile iniţiale sau sub aceste valori, este necesar ca $|\lambda_1|$ şi $|\lambda_2|$ să fie mai mici ca 1.

Într-adevăr

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{1.12.12}$$

Rezultă

$$x_1 = \lambda_1 x_1$$

$$x_2 = \lambda_2 x_2.$$

Deci condiţiile de stabilitate sînt

$$\text{Urma } \mathscr{B}^n \leqslant 2 \tag{1.12.13}$$

$$\text{Det } \mathscr{B}^n \leqslant 1. \tag{1.12.14}$$

1.13. Tratarea problemei se face în mod condensat folosind formalismul matriceal. Deplasarea razei de lumină între cele două oglinzi se face în două faze:

a) deplasarea de la o oglindă la alta,

b) reflexia pe oglindă.

În prima fază raza reflectată de oglinda O_1 pleacă din punctul $P_1(x_1)$ spre oglinda O_2 pe o direcţie care face un unghi θ_1^r cu axa rezonatorului şi ajunge într-un punct $P_2(x_2)$ făcînd un unghi θ_2^i cu

axa rezonatorului (fig. 1.13R), între mărimile x_1, θ_1^r şi x_2, θ_2^i se pot scrie următoarele relaţii :

$$\begin{aligned} \theta_2^i &= -\theta_1^r \\ x_2 &= x_1 + l\theta_1^r \end{aligned} \quad (1.13.1)$$

deoarece θ_1^r este negativ şi foarte mic.

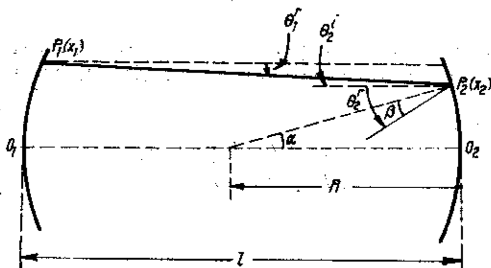


Fig. 1.13 R.

Aşezînd mărimile care caracterizează starea iniţială şi pe cele care caracterizează starea finală sub forma de matrice coloană, trecerea de la o matrice coloană la alta se realizează cu ajutorul unei matrice T_x^{12}

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2^i \end{pmatrix} = (T_x^{12}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1^r \end{pmatrix}; \quad (1.13.2)$$

(T_x^{12}) se numeşte matrice de transfer de la O_1 la O_2.

Prin comparare cu ecuaţia (1.13.1) obţinem

$$(T_x^{12}) = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.13.3)$$

În cea de-a 2-a fază, raza incidentă pe a 2-a oglindă sub unghiul θ_2^i se reflectă din acelaşi punct sub unghiul θ_2^r faţă de axa rezonato-

rului. Pentru a calcula θ_2^r observăm că unghiul de incidență pe oglinda a 2-a față de normala la oglindă este

$$\beta = \alpha + \theta_2^i \tag{1.13.4}$$

și este egal cu unghiul de reflexie.

Rezultă că unghiul de emergență va fi

$$\theta_2^r = -(2\beta - \theta_2^i) = -2\alpha - \theta_2^i \approx -2\frac{x_2}{R_2} - \theta_2^i. \tag{1.13.5}$$

Ecuației (1.13.5) îi adăugăm ecuația

$$x_2 = x_2. \tag{1.13.6}$$

În scriere matriceală ecuațiile (1.13.5) și (1.13.6) pot fi condensate sub forma

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2^r \end{pmatrix} = (R_x^2)\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2^i \end{pmatrix} \tag{1.13.7}$$

unde (R_x^2) este matricea de reflexie pe oglinda O_2. Comparind (1.13.7) cu ecuația (1.13.5) și (1.13.6) obținem

$$(R_x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & -1 \end{pmatrix} \tag{1.13.8}$$

După ce se reflectă și pe oglinda O_1, raza a efectuat un parcurs complet (dus-întors) și deci mărimile finale se vor obține din cele inițiale prin aplicare succesivă a matricelor corespunzătoare diferitelor faze. Notînd mărimile finale x_1'', $\theta_1^{r''}$, și pe cele inițiale x_1' și $\theta_1^{r'}$ obținem

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ \theta_1^{r''} \end{pmatrix} = (R_x^1)\,(T_x^{21})(R_x^2)\,(T_x^{12})\begin{pmatrix} x_1' \\ \theta_1^{r'} \end{pmatrix} \tag{1.13.9}$$

unde $(T_x^{21}) = (T_x^{12})$ este matricea de transfer în sens invers iar (R_x^1) este matricea de reflexie pe oglinda O_1.

Notînd matricea corespunzătoare unui parcurs complet cu (P) ecuaţia (1.13.9) se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ \theta_1^{r''} \end{pmatrix} = (P) \begin{pmatrix} x_1' \\ \theta_1^{r'} \end{pmatrix}. \qquad (1.13.9')$$

Condiţia de stabilitate cere ca raza să nu părăsească rezonatorul, cu alte cuvinte trebuie ca

$$\begin{aligned} |x_1''| &\leqslant |x_1'| \\ |\theta_1^{r''}| &\leqslant |\theta_1^{r'}|. \end{aligned} \qquad (1.13.10)$$

Relaţia dintre mărimile iniţiale şi finale este foarte simplă dacă matricea (P) se diagonalizează, adică dacă se găseşte o matrice unitară (U) astfel încît

$$(U)\ (P)\ (U)^{-1} = R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \qquad (1.13.11)$$

Elementele matricei (U) se găsesc scriind (1.13.11) sub forma

$$(u_{11}\ u_{12}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda\ (u_{11}\ u_{12}) \qquad (1.13.11')$$

echivalent cu

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\ u_{11} + a_{21}\ u_{12} &= 0 \\ a_{12}\ u_{11} + (a_{22} - \lambda)\ u_{12} &= 0. \end{aligned} \qquad (1.13.12)$$

Pentru a avea soluţie nebanală trebuie ca determinantul sistemului (1.13.12) să fie nul

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.13.13)$$

sau

$$\lambda^2 - t\lambda + \delta = 0. \qquad (1.13.14)$$

unde am notat $t = \text{Urma}\ (P) = \lambda_1 + \lambda_2$, iar $\delta = \text{Det}\ (P) = \lambda_1\lambda_2$.

Condițiile de stabilitate devin

$$|x_1''| \leqslant \lambda_1 |x_1'|$$

$$|\theta_1''| \leqslant \lambda_2 |\theta_1''| \qquad (1.13.15)$$

echivalent cu $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 2$ sau

$$\text{Urma }(P) \leqslant 2. \qquad (1.13.16)$$

Calculînd matricea

$$(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

obținem

$$\text{Urma }(P) = 1 - \frac{2l}{R_2} - \frac{4l^2}{R_1 R_2} - \frac{2l}{R_2} - \frac{4l}{R_1} + 1. \qquad (1.13.17)$$

Aplicînd condiția (1.13.16) obținem

$$\left(\frac{l}{R_1} - 1\right)\left(\frac{l}{R_2} - 1\right) \leqslant 1. \qquad (1.13.18)$$

Întrucît $R_1 = R_2 = 1$ m, ecuația (1.13.18) devine

$$\left(\frac{l}{R} - 1\right)^2 \leqslant 1. \qquad (1.13.19)$$

În cazul egalității ecuația (1.13.19) se scrie

$$l = 2R. \qquad (1.13.20)$$

În concluzie, pentru ca rezonatorul să fie stabil, distanța dintre oglinzi trebuie să fie mai mică decît suma razelor celor două oglinzi deci : $0,7 \text{ m} < l < 2 \text{ m}$.

1.14. Pentru ca interferența între razele reflectate pe diferite suprafețe de separare să fie constructivă trebuie ca diferența de drum dintre acestea să fie un multiplu întreg al lungimii de undă

$$\delta = n\lambda \quad \text{cu} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.14.1)$$

Pentru ca între razele *1* și *2* (fig. 1.14R, a) să existe o diferență de drum λ stratul *2* ar trebui să aibă indicele de refracție $n_{r2} < n_{r1}$ iar stratul *1* să aibă o grosime optică de $\frac{\lambda}{4}$. Dacă indicele de refracție al stratului *3* este mai mare decît n_{r2} atunci reflexia la suprafața *III* se face fără pierdere de $\frac{\lambda}{2}$ deci compensarea unei asemenea pierderi apărută la reflexia pe suprafața *II* poate fi realizată dacă stratul *3* are o grosime optică tot de $\frac{\lambda}{4}$. Dar întrucît $n_{r1} > n_{r2}$ putem face stratul *3* din același material cu stratul *1*. Continuînd raționamentul ajungem la concluzia că este necesar să se depună un număr impar de strate dielectrice cu indice de refracție mare și mic, alternativ, toate cu grosimea optică egală cu $\frac{\lambda}{4}$.

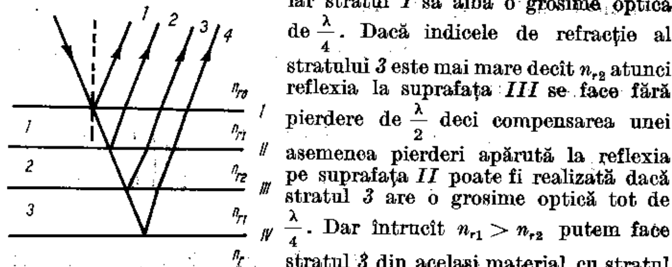


Fig. 1.14R, a

1°. Cu acest raționament sîntem în măsură să calculăm grosimea unui strat:

— pentru criolit straturile vor avea grosimea dată de

$$n_{r2} d_2 = \frac{\lambda}{4} \qquad (1.14.2)$$

de unde $d_2 = 820\ \text{Å} = 8{,}2 \cdot 10^{-8}$ m,

— pentru straturile de sulfură de zinc

$$d_1 = \frac{\lambda}{4n_{r1}} \approx 480\ \text{Å} = 4{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{m}.$$

2°. Pentru rezolvarea acestei chestiuni vom ține seama că incidența luminii pe oglindă este normală. Vom face distincție între cele două fețe ale unei suprafețe de separare, de exmplu, în cazul suprafeței *I* între fața dinspre mediul cu n_{r0} și cea dinspre mediul cu n_{r1}.

Introducînd, pentru componentele electrică și magnetică ale undei incidente presupusă liniar polarizată notațiile

$E_0^d = A_0 e^{i\tau_0 d}$ pentru unda incidentă pe fața I

$E_0^r = R_0 e^{i\tau_0 r}$ pentru unda venind dinspre fața I (1.14.3)

$E_1^d = A_1 e^{i\tau_1 d}$ pentru unda transmisă prin suprafața I

Marcînd cu un indice superior amplitudinile la diferite suprafețe de separare conform figurii 1.14R, b, vom putea scrie ecuațiile de continuitate pentru componentele undei la diferitele suprafețe de separare. La prima suprafață:

pentru componenta electrică

$$A_0' + R_0' = A_1' + R_1' = E' \quad (1.14.4)$$

pentru componenta magnetică

$$\frac{1}{\mathscr{I}_1}(A_0' - R_0') = \frac{1}{\mathscr{I}_2}(A_1' - R_1') \quad (1.14.5)$$

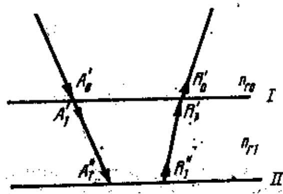


Fig. 1.14R, b

unde

$$\mathscr{I} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon_0 c n_{r_1}} \quad (1.14.6)$$

este impedanța optică a mediului respectiv.

Cu aceasta ecuația (1.14.5) devine

$$H' = n_{r0}(A_0' - R_0') = n_{r1}(A_1' - R_1'). \quad (1.14.5')$$

În mod analog pentru suprafața II putem scrie

$$E'' = A_1'' + R_1'' = A_1' \exp\left[-\frac{i}{2}x_1\right] + R_1' \exp\left[\frac{i}{2}x_1\right] \quad (1.14.6)$$

unde $x_1 = 2\frac{2\pi}{\lambda} n_{r1} d_1$ este dublul defazajului introdus prin parcurgerea stratului I

$$H'' = n_{r1}(A_1'' - R_1'') =$$

$$= n_{r1}\left(A_1' \exp\left[-\frac{i}{2}x_1\right] - R_1' \exp\left[\frac{i}{2}x_1\right]\right). \quad (1.14.7)$$

Continuînd, pentru suprafața de separare K dintre ultimele straturi, $k-1$ și k, vom avea

$$E^k = A_k^k + R_k^k =$$

$$= A_k^{k-1} \exp\left[-\frac{i}{2} x_{k-1}\right] + R_k^{k-1} \exp\left[\frac{i}{2} x_{k-1}\right] \qquad (1.14.8)$$

$$H^k = n_{r_{k-1}}(A_k^k - R_k^k) =$$

$$= n_{r_{k-1}}\left(A_k^{k-1} \exp\left[-\frac{i}{2} x_{k-1}\right] - R_k^{k-1} \exp\left[\frac{i}{2} x_{k-1}\right]\right). \quad (1.14.9)$$

În sfîrșit, pentru suprafața de separare $k+1$ dintre ultimul film k și substrat, ecuațiile vor fi

$$E^{k+1} = A_k^{k+1} + R_k^{k+1} =$$

$$= A_k^k \exp\left[-\frac{i}{2} x_k\right] + R_k^k \exp\left[\frac{i}{2} x_k\right] = A_{k+1}^{k+1} \qquad (1.14.10)$$

$$H^{k+1} = n_k(A_k^{k+1} - R_k^{k+1}) =$$

$$= \left(A_k^k \exp\left[-\frac{1}{2} i x_k\right] + R_k^k \exp\left[\frac{1}{2} i x_k\right]\right) n_k = A_{k+1}^{k+1} n_r. \quad (1.14.11)$$

Pentru o suprafață de separare oarecare h dintre straturile h și $h+1$ vom scrie aceste ecuații sub forma

$$E^h = m_{11}^h E^{h+1} + m_{12}^h H^{h+1} \qquad (1.14.12)$$

$$H^h = m_{21}^h E^{h+1} + m_{22}^h H^{h+1} \qquad (1.14.13)$$

echivalent cu ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} E^h \\ H^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^h & m_{12}^h \\ m_{11}^h & m_{22}^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{h+1} \\ H^{h+1} \end{pmatrix}. \qquad (1.14.14)$$

Scriind ecuații de tipul (1.14.14) pentru cele k suprafețe de separare, vom avea în final

$$\begin{pmatrix} E' \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m'_{11} & m'_{12} \\ m'_{21} & m'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m''_{11} & m''_{12} \\ m''_{21} & m''_{22} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} m^k_{11} & m^k_{12} \\ m^k_{21} & m^k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{k+1} \\ H^{k+1} \end{pmatrix}. \quad (1.14.15)$$

Sau, condensat,

$$\begin{pmatrix} E' \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{k+1} \\ H^{k+1} \end{pmatrix}. \quad (1.14.16)$$

Ecuația (1.14.16) se mai poate scrie

$$E' = m_{11}E^{k+1} + m_{12}H^{k+1} \quad (1.14.17)$$

$$H' = m_{21}E^{k+1} + m_{22}H^{k+1}. \quad (1.14.18)$$

Împărțind (1.14.17) și (1.14.18) membru cu membru, obținem

$$\frac{E'}{H'} = \frac{m_{11}\dfrac{E^{k+1}}{H^{k+1}} + m_{12}}{m_{21}\dfrac{E^{k+1}}{H^{k+1}} + m_{22}}. \quad (1.14.19)$$

Împărțind membru cu membru (1.14.4) și (1.14.5′)

$$\frac{E'}{H'} = \frac{A'_0 + R'_0}{(A'_0 - R'_0)\, n_{r0}}. \quad (1.14.20)$$

Din ecuațiile (1.14.10 și (1.14.11)

$$\frac{E^{k+1}}{H^{k+1}} = \frac{1}{n_r}. \quad (1.14.21)$$

Introducînd (1.14.20) și (1.14.21) în (1.14.19) obținem

$$\frac{A'_0 + R'_0}{(A'_0 - R'_0)\, n_{r0}} = \frac{m_{11}\dfrac{1}{n_r} + m_{12}}{m_{21}\dfrac{1}{n_r} + m_{22}} \quad (1.14.23)$$

şi de aici rezultă raportul

$$\frac{R_0'}{A_0'} = r \exp [i\delta] = \frac{\frac{n_{r0}}{n_r} m_{11} + n_{r0} m_{12} - \frac{1}{n_r} m_{21} - m_{22}}{\frac{n_{r0}}{n_r} m_{11} + n_{r0} m_{12} + \frac{1}{n_r} m_{21} + m_{22}} \quad (1.14.24)$$

unde r este coeficientul de reflexie al sistemului iar δ defazajul total dintre unda incidentă şi cea reflectată.

Pentru a găsi factorul de reflexie $\mathscr{R} = r^2$ vom înmulţi ecuaţia (1.14.24) cu complexa conjugată.

În concluzie, problema se reduce la calculul elementelor de matrice m_{ij}.

În acest scop, din ecuaţiile (1.14.6) şi (1.14.7) calculăm $A_1' + R_1'$

$$A_1' = \frac{1}{2n_{r1}} \exp\left[\frac{i}{2} x_1\right] (n_{r1} E'' + H'') \quad (1.14.25)$$

$$R_1' = \frac{1}{2n_{r1}} \exp\left[-\frac{i}{2} x_1\right] (n_{r1} E'' - H'') \quad (1.14.26)$$

care, introduse în ecuaţiile (1.14.4) şi (1.14.5'), dau

$$E' = \cos\frac{1}{2} x_1 E'' + \frac{i}{n_{r1}} \sin\frac{1}{2} x_1 H'' \quad (1.14.27)$$

$$H' = i n_{r1} \sin\frac{1}{2} x_1 E'' + \cos\frac{1}{2} x_1 H''. \quad (1.14.28)$$

Ecuaţiile (1.14.27) şi (1.14.28) se pot scrie matriceal şi rezultă pentru matricea corespunzătoare primei suprafeţe de separare (dintre primul strat şi cel de al 2-lea)

$$M' = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2} x_1 & \frac{i}{n_{r1}} \sin\frac{1}{2} x_1 \\ i n_{r1} \sin\frac{1}{2} x_1 & \cos\frac{1}{2} x_1 \end{pmatrix} \quad (1.14.29)$$

care se vede că depinde numai de indicele de refracție și de grosimea stratului *1*. În mod analog, matricele suprafețelor următoare vor depinde numai de proprietățile stratului anterior.

Deoarece în cazul considerat straturile au grosimea optică $\frac{\lambda}{4} = n_{rj} d_j$, matricea corespunzătoare unei suprafețe oarecare devine

$$M^h = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_{rh}} \\ i n_{rh} & 0 \end{pmatrix}, \quad h = 1, 2, \ldots, k \qquad (1.14.30)$$

deoarece $x_j = \pi$.

În acest caz ecuația (1.14.15) devine

$$\begin{pmatrix} E' \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_{r1}} \\ i n_{r1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_{r2}} \\ i n_{r2} & 0 \end{pmatrix} \cdots$$
$$\cdots \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_{rk}} \\ i n_{rk} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{k+1} \\ H^{k+1} \end{pmatrix}. \qquad (1.14.31)$$

Din înmulțirea celor k matrice M^h se obține matricea M ale cărei elemente m_{t_i} se introduc apoi în (1.14.24).

Deoarece sistemul de filme este format din straturi care alternează ca indice de refracție, adică avînd structura: $n_{r0}, n_{r1}, n_{r2}, n_{r1}, n_{r2}, \ldots, n_{r1}, n_{r2}$, pentru prima pereche de straturi vom avea

$$M' M'' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_{r1}} \\ i n_{r1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_{r2}} \\ i n_{r2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{n_{r2}}{n_{r1}} & 0 \\ 0 & -\frac{n_{r1}}{n_{r2}} \end{pmatrix}. \qquad (1.14.32)$$

Pentru cele $\frac{k-1}{2}$ asemenea perechi matricea produs va fi

$$M^{\frac{k-1}{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{n_{r2}}{n_{r1}} & 0 \\ 0 & -\frac{n_{r1}}{n_{r2}} \end{pmatrix}^{\frac{k-1}{2}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{n_{r2}}{n_{r1}}\right)^{\frac{k-1}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{n_{r1}}{n_{r2}}\right)^{\frac{k-1}{2}} \end{pmatrix}. \qquad (1.14.33)$$

Matricea finală se obține înmulțind (1.14.33) cu matricea corespunzătoare suprafeței de separare dintre ultimul film și sticlă

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_{r1}} \\ in_{r1} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14.34}$$

astfel încît obținem

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{n_{r2}^{\frac{k-1}{2}}}{n_{r1}^{\frac{k+1}{2}}} \\ i\frac{n_{r1}^{\frac{k+1}{2}}}{n_{r2}^{\frac{k-1}{2}}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.14.35}$$

Introducînd elementele acestei matrice în ecuația (1.14.24) obținem

$$\frac{R_0'}{A_0'} = r\cdot\exp\,[i\delta] = \frac{n_{r0}\,i\frac{n_{r2}^{\frac{k-1}{2}}}{n_{r1}^{\frac{k+1}{2}}} - \frac{i}{n_r}\frac{n_{r1}^{\frac{k+1}{2}}}{n_{r2}^{\frac{k-1}{2}}}}{n_{r0}\,i\frac{n_{r2}^{\frac{k-1}{2}}}{n_{r1}^{\frac{k+1}{2}}} + \frac{i}{n_r}\frac{n_{r1}^{\frac{k+1}{2}}}{n_{r2}^{\frac{k-1}{2}}}} =$$

$$= \frac{n_{r0}n_r n_{r2}^{k-1} - n_{r1}^{k+1}}{n_{r0}n_r n_{r2}^{k-1} + n_{r1}^{k+1}}. \tag{1.14.35}$$

Factorul de reflexie al întregului sistem va fi deci

$$\mathscr{R} = \left(\frac{n_{r0}n_r n_{r2}^{k-1} - n_{r1}^{k+1}}{n_{r0}n_r n_{r2}^{k-1} + n_{r1}^{k+1}}\right)^2. \tag{1.14.36}$$

Introducînd în expresia (1.14.36) valorile date în textul problemei, şi ţinînd seama că raza incidentă se propagă în aer ($n_{r0} = 1$) obţinem pentru diferite sisteme de straturi valorile date mai jos:

număr de straturi	$\mathcal{R}$
3	67,2%
5	87,2%
7	95,4%
9	98,4%
11	99,8%

Deci pentru a realiza condiţia cerută de problemă vom depune 9 strate alternative de grosime optică $\lambda/4$.

Dacă valoarea cerută nu s-ar fi putut obţine cu substanţele date în textul problemei ar fi fost necesar să se utilizeze alte substanţe dielectrice.

1.15. 1°. Condiţia ca în cristalul ce joacă rol de cavitate rezonantă să apară unde staţionare pentru unda electromagnetică, este ca lungimea cristalului să fie egală cu un număr întreg de semilungimi de undă, adică

$$d = N_1 \frac{\lambda}{2}. \tag{1.15.1}$$

O anumită valoare a lui N_1 caracterizează un anumit mod de oscilaţie şi ţinînd seama de polarizarea undei, unei valori a lui N_1 îi corespund două moduri. Deci numărul de moduri de oscilaţie din cristal va fi

$$N = 2N_1 = \frac{2 \cdot 2d}{\lambda} = 4 \frac{d}{\lambda} \tag{1.15.2}$$

şi

$$N = \frac{4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{6113 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 6 \cdot 10^4 \text{ moduri}.$$

2°. Densitatea de moduri $p(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ este numărul de moduri din unitatea de volum, aflate în intervalul de frecvenţă ω, $\omega + \mathrm{d}\omega$, adică

$$p(\omega) = \frac{1}{V} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\omega} \tag{1.15.3}$$

unde V este volumul cavităţii şi P numărul de moduri a căror frecvenţă e mai mică decît ω.

Din condiţiile la limită impuse cîmpului electromagnetic, rezultă că frecvenţele de rezonanţă sînt date de ecuaţia

$$\left(\frac{q\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{r\pi}{l_2}\right)^2+\left(\frac{s\pi}{l_3}\right)^2=k^2 \tag{1.15.4}$$

unde q, r, s sînt numere întregi, l_1, l_2, l_2 — dimensiunile cristalului, iar k — numărul de undă.

Pentru simplificare, considerăm cristalul cubic, adică $l_1 = l_2 = l_3 = a$.

Ecuaţia (1.15.4) devine

$$q^2+r^2+s^2=\left(\frac{\omega n_r}{\pi c}a\right)^2. \tag{1.15.5}$$

Am obţinut ecuaţia unei sfere, de rază $R=\frac{\omega n_r}{\pi c}a$, în spaţiul q, r, s. Numărul stărilor cu frecvenţa mai mică decît ω va fi dat de numărul punctelor aflate în volumul sferei de rază R. La numărarea modurilor de oscilaţie considerăm doar stările în care q, r, s iau valori pozitive şi pentrucă la o valoare a lui k corespund două stări de polarizare, deci două moduri, jumătate din numărul modurilor va fi dată de numărul punctelor ce se află într-o optime din volumul sferei de rază R.

Acest volum este $V_1=\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}R^3$ şi numărul de moduri cu frecvenţa mai mică decît ω este

$$P=2V_1=2\cdot\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{\pi}{3}\frac{\omega^3n_r^3}{\pi^3c^3}\cdot a^3=\frac{1}{3}\frac{\omega^3n_r^3}{\pi^2c^3}V. \tag{1.15.6}$$

Densitatea de moduri devine

$$p(\omega)=\frac{1}{V}\frac{dP}{d\omega}=\frac{1}{3}\frac{3\omega^2n_r^3}{\pi^2c^3}=\frac{\omega^2n_r^3}{\pi^2c^3}=\frac{n_r^3}{\lambda^2c}. \tag{1.15.7}$$

În cazul considerat, cînd $n_r = 1{,}83$ şi $\lambda = 6113$ Å

$$p(\omega) = \frac{(1{,}83)^2}{(6113)^2 \cdot 10^{-20}\,\text{m}^2\, 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 5 \cdot 10^4\ \text{mod} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}.$$

1.16. Conform rezultatului problemei 1.5 putem scrie că

$$\alpha = 2\cos\left(\frac{r}{n}\pi\right), \quad \text{unde} \quad r = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (1.16.1)$$

pentru ca sistemul de lentile considerat să fie afocal. Din enunţul problemei

$$\alpha = 2 - 4\left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right). \qquad (1.16.2)$$

Din relaţiile (1.16.1) şi (1.16.2) obţinem

$$\left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right) = \sin^2\left(\frac{r}{n}\frac{\pi}{2}\right). \qquad (1.16.3)$$

Pentru prescurtare notăm

$$g_1 = 1 - \frac{l}{R_1} \quad \text{şi} \quad g_2 = 1 - \frac{l}{R_2} \qquad (1.16.4)$$

şi relaţia (1.16.3) se scrie

$$g_1 g_2 = \sin^2\left(\frac{r}{n}\frac{\pi}{2}\right). \qquad (1.16.5)$$

Relaţia (1.16.5) arată că rezonatorul considerat este reprezentat printr-un sistem afocal care din punct de vedere al opticii geometrice are pierderi mici dacă produsul $g_1 g_2$ este pozitiv şi mai mic decît 1. Cu alte cuvinte, rezonatorul considerat este stabil dacă

$$0 < g_1 g_2 < 1. \qquad (1.16.6)$$

Grafic, relaţia (1.16.6) duce la diagrama de stabilitate dată în figura 1.16R. Pe axele de coordonate s-au luat variabilele g_1 şi g_2. Regiunile haşurate corespund sistemelor cu pierderi mari (sisteme instabile) în timp ce regiunile nehaşurate limitate prin axele de coordonate şi prin hiperbola $g_1 g_2 = 1$ corespund la pierderi mici (sisteme stabile).

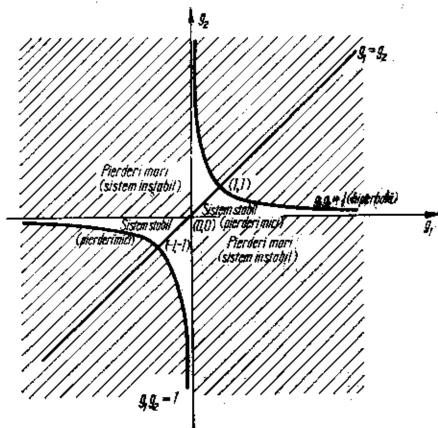


Fig. 1.16. R.

Punctele corespunzînd unui rezonator format din 2 oglinzi cu razele de curbură identice ($R_1 = R_2$) se aşează pe dreapta definită de relaţia

$$g_1 = g_2.$$

Remarcăm, de asemenea, că originea corespunde rezonatorului cu oglinzi identice depărtate confocal, punctul (1,1) corespunde rezonatorului cu oglinzi plan — paralele, iar punctul (—1, —1) rezonatorului cu oglinzi identice aşezate concentric.

Regiunile de pierderi mici din figura 1.16R — reprezintă următoarele trei tipuri de rezonatori posibili:

— Rezonatorul are ambele oglinzi concave şi centrul de curbură al fiecărei oglinzi se găseşte dincolo de cealaltă oglindă.

— Rezonatorul are ambele oglinzi concave şi centrul de curbură al fiecărei oglinzi se găseşte între cealaltă oglindă şi centrul acesteia.

— O oglindă este convexă şi una concavă, iar centrul de curbură al oglinzii concave cade între oglinda convexă şi centrul de curbură al oglinzii convexe.

Desigur că din punct de vedere practic trecerea de la regiunile de pierderi mici la regiunile de pierderi mari nu este bruscă, după cum arată diagrama prezentată pe baza principiilor opticii geometrice.

Trecerea este gradată în funcție de numărul lui Fresnel

$$\mathcal{N} = \frac{l^2}{R_1 R_2}.$$

Pierderile descresc cu creșterea numărului lui Fresnel în regiunile de pierderi mici și dau fluctuații, cu eventuale descreșteri, în regiunile de pierderi mari.

1.17. 1°. Pornind de la expresia dată în enunț, cu notația $x_r x_s = \sigma_r \sigma_s / i \exp[-ib]$, și observînd că variabilele se separă, se obține o pereche de ecuații integrale care specifică funcțiile proprii ale cavității

$$F_r(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x_r} \int_{-\sqrt{c}}^{+\sqrt{c}} F_r(X')\, e^{iXX'}\, \mathrm{d}X' \tag{1.17.1}$$

și

$$G_s(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x_s} \int_{-\sqrt{c}}^{+\sqrt{c}} G_s(Y')\, e^{iYY'}\, \mathrm{d}Y'. \tag{1.17.2}$$

Sînt ecuații omogene Fredholm, de ordinul 2, cu $F_r(X')$, $G_s(Y')$ ca nuclee.

2°. Pornim de la funcția generatoare a polinoamelor Hermite

$$g(x, t) = \exp[-t^2 + 2tx] = \exp[x^2]\exp[-(t-x)^2]$$
$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \tag{1.17.3}$$

Înlocuind x prin y în expresia (1.17.3), multiplicînd cu $\exp[-ixy - (y^2/2)]$ și integrînd, obținem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2yt - t^2 + ixy - (y^2/2)]\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[ixy - (y^2/2)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(Y)}{n!} t^n\, \mathrm{d}y. \tag{1.17.4}$$

Efectuînd integrala în partea stîngă și intervertind integrarea cu însumarea în partea dreaptă, rezultă

$$\sqrt{2\pi}\exp\left(-x^2/2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}H_n(x) =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[ixy-(y^2/2)\right]H_n(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (1.17.5)$$

Deoarece egalitatea este adevărată pentru orice valoare a lui t, coeficienții acelorași puteri ale lui t sînt egali și se obține

$$\exp\left(-x^2/2\right)H_n(x) =$$

$$=\frac{1}{i^n\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-ixy-(y^2/2)\right]H_n(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (1.17.6)$$

Comparînd expresiile (1.17.1) și (1.17.2) cu (1.17.6) găsim

$$F_r(X) = \exp\left[-(X^2/2)\right]H_n(x) \qquad (1.17.7)$$

cu

$$x_r = i^r. \qquad (1.17.8)$$

Funcțiile proprii $F_r(X)$ vor da distribuția cîmpului pe suprafața oglinzii.

3°. Condiția de fază se obține din

$$\sigma_r\sigma_s = x_r x_s i e^{-ikb}$$
$$\text{cu} \quad x_r = i^r \qquad (1.17.9)$$
$$\text{și} \quad x_s = i^s$$

ținînd seama că la rezonanță, schimbarea de fază pentru un drum dus-întors trebuie să fie $2\pi q$ (q întreg) și notînd

$$2|(r+s+1)(\pi/2)-kb| = 2\pi q \qquad (1.17.10)$$

unde factorul 2 în partea stîngă apare din considerarea celor două reflexii. Expresia (1.17.10) se mai scrie

$$(4b/\lambda) = 2q + (r+s+l); \qquad (1.17.11)$$

$r, s = 0, 1, 2, \ldots$ specifică modurile transversale, $q = 10^5 \div 10^7$ specifică numărul de moduri longitudinale.

4°. Ținînd seama de normările făcute obținem

$$f_r(x) = \text{const.}\, H_r[x(2\pi/b\lambda)^{1/2}] \exp[-(\pi x^2/b\lambda)]. \qquad (1.17.12)$$

Deci funcțiile proprii în vecinătatea axului (datorită ipotezei inițiale că spațiul dintre oglinzi e mult mai mare decît raza oglinzii) sînt date de produsul dintre un polinom Hermite de ordinul r și o funcție gaussiană. (Se arată că pentru oglinzi cu secțiune circulară, funcțiile proprii sînt date de produsul dintre un polinom Laguerre și o funcție gaussiană).

5°. Deoarece trebuie să ținem seama de cîmpul peste apertură, vom avea de reprezentat o funcție gaussiană de forma

$$\exp[-(x^2 + y^2)\pi/b\lambda]$$

înmulțită cu niște polinoame Hermite. Pentru $r = 0$, $s = 0$, $H_0 = 1$ și fasciculul este gaussian. Este modul fundamental TEM_{00} (fig. 1.17R, a).

Asemănător se obțin modurile TEM_{10}, TEM_{20} (fig. 1.17R, b).

6°. Se poate arăta, folosind un dispozitiv de interferență de tip Young în care cele două fante sînt puse mai întîi în același lob, apoi în lobi diferiți. În figurile de interferență obținute se schimbă locul maximelor cu al minimelor.

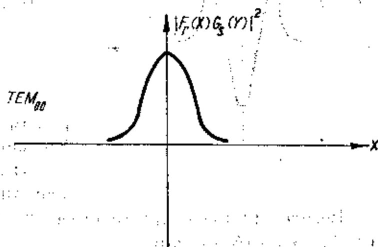


Fig. 1.17.R.a

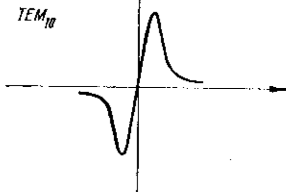
1.18. 1°. Energia unui fascicul paralel de radiație, avînd lungimea de undă λ, ce cade pe oglinda A este reflectată și difractată într-un unghi egal cu $\frac{\lambda}{a}$ (discul Airy).

Unghiul sub care se vede din A oglinda B este $\frac{a}{d}$. Radiația care face acest unghi cu axa rezonatorului va traversa o singură dată lungimea cavității, înainte de a o părăsi.

Într-un rezonator laser radiația trebuie să traverseze de mai multe ori distanța dintre oglinzi pentru a fi amplificată.

Dacă numărul de traversări a radiației trebuie să fie n, unghiul maxim pe care îl poate face direcția de propagare a radiației cu axa rezonatorului este

$$\frac{1}{n}\frac{a}{l}. \qquad (1.18.1)$$



Astfel, pentru ca pierderile prin difracție să fie neglijabile, trebuie ca unghiul în care e reflectată și difractată radiația de una din oglinzi să fie mai mic decît unghiul făcut de direcția de propagare a radiației cu axa rezonatorului, adică

$$\frac{\lambda}{a} < \frac{1}{n}\frac{a}{l}. \qquad (1.18.2)$$

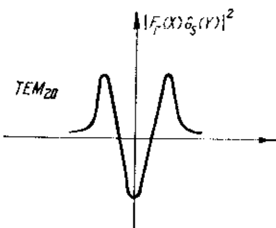


Fig. 1.17.R.b

Practic, a este raza mediului activ dintre oglinzi.

Raportul

$$\frac{a^2}{\lambda l} = \mathcal{N} \qquad (1.18.3)$$

poartă numele de numărul lui Fresnel.

Altfel spus, pentru ca pierderile prin difracție să fie neglijabile, trebuie ca fiecare oglindă să intercepteze cît mai mult din energia provenită de la cealaltă oglindă.

Pentru aceasta, trebuie ca unghiul sub care se vede fiecare oglindă din centrul celeilalte să fie mai mare decît unghiul sub care se vede figura de difracție a cîmpului îndepărtat al radiației provenită de la cealaltă oglindă. Astfel, $\mathcal{N}$ este aproximativ numărul zonelor Fresnel interceptate și condiția ca pierderile de difracție să poată fi neglijate apare sub forma condiției ca numărul Fresnel $\mathcal{N}$ să fie mai

mare decît numărul n al traversărilor radiației între cele două oglinzi, adică

$$\mathcal{N} > n. \tag{1.18.4}$$

Practic, pierderile prin difracție se consideră neglijabile cînd $\mathcal{N} > 100$.

a) În cazul laserului cu rubin

$$\mathcal{N} = \frac{a^2}{\lambda l} = \frac{n_r a^2}{\lambda_0 l} = \frac{1{,}76 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2}{4 \cdot 6943 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}^2} \simeq 633 > 100.$$

Înseamnă că în cazul laserului cu rubin considerat, pierderile prin difracție sînt neglijabile.

b) În cazul laserului cu argon

$$\mathcal{N} = \frac{a^2}{\lambda l} = \frac{4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{4880 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \cdot 5 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}} \approx 16 \ll 100.$$

În acest caz pierderile prin difracție nu sînt neglijabile.

2°. Condiția pentru care pierderile prin difracție sînt mici în cavitatea laser, se poate deduce, folosind conceptul de foton, pe baza principiului de incertitudine.

Fotonii ce ajung la oglinzile A și B pot fi localizați cu ajutorul axelor Ox, Oy, Oz, unde Oz este axa cavității. Cînd un foton e reflectat înapoi în cavitate de oglinda A, poziția lui față de axa Ox e definită cu imprecizia

$$\Delta x \sim a. \tag{1.18.5}$$

Din principiul de incertitudine rezultă:

$$\Delta p_x \sim \frac{2\pi\hbar}{a}. \tag{1.18.6}$$

De aici, direcția cu care fotonul părăsește oglinda A are imprecizia

$$\Delta\theta \sim \frac{\Delta p_x}{p_z} \sim \frac{2\pi c}{a\omega} \tag{1.18.7}$$

unde

$$p_z = \frac{\hbar\omega}{c}\cdot \qquad (1.18.8)$$

Pentru ca pierderile prin difracţie să fie minime trebuie ca fotonul ce pleacă de la oglinda A să fie interceptat de oglinda B de n ori, adică trebuie ca poziţia fotonului la interceptarea oglinzii B să aibă imprecizia

$$nl\cdot\Delta\theta < a. \qquad (1.18.9)$$

Înlocuind (1.18.7) în (1.18.9) apare condiţia sub forma

$$\frac{a^2}{n\lambda l} > 1 \qquad (1.18.10)$$

care se poate scrie că $\frac{\mathcal{N}}{n} > 1$, adică chiar (1.18.4).

1.19. Propagarea radiaţiei electromagnetice printr-o fibră (fig. 1.19R, a), cu centri fluorescenţi care au schema de nivele ca în figura 1.19R, b, este însoţită de două procese:

— descreşterea în intensitate a undei datorită absorbţiei pe unitatea de lungime

$$-\alpha u(\omega, x) \qquad (1.19.1)$$

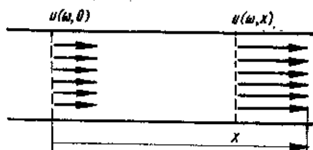


Fig. 1.19 R,a

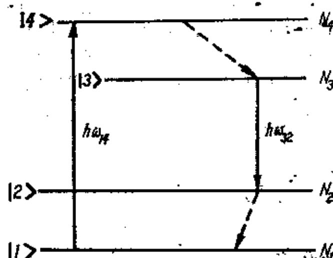


Fig. 1.19 R,b

α fiind coeficientul de absorbţie şi $u(\omega, x)$ densitatea de radiaţie în fibră pe unitatea de secţiune;

— amplificarea radiaţiei prin emisie stimulată, dată de expresia

$$2\pi\frac{B_{32}L(\omega)N_3u(\omega, x)\hbar\omega_{32}}{v\Delta\omega_0} \qquad (1.19.2)$$

unde B_{32} este coeficientul Einsten de emisie stimulată, N_3 numărul de atomi pe nivelul $|3>$, $\Delta t = \frac{1}{v}$ timpul ca unda să traverseze unitatea de lungime şi $v = \frac{c}{n_r}$ n_r fiind indicele de refracţie, iar

$$L(\omega) = \frac{\Delta\omega_0^2}{(\omega - \omega_{32})^2 + \Delta\omega_0^2}. \tag{1.19.3}$$

Astfel, schimbarea densităţii de energie a radiaţiei $u(\omega, x)$, pe unitatea de drum în fibră, va fi

$$\frac{\mathrm{d}u(\omega, x)}{\mathrm{d}x} = -\alpha u(\omega, x) + \frac{B_{32}L(\omega)\, N_3 u(\omega,\ x)}{v}\ \frac{\hbar\omega_{32}}{\Delta\omega_0}. \tag{1.19.4}$$

Valoarea lui N_3 se calculează din ecuaţiile ratelor

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = I(B_{14}N_1 + B_{24}N_2) - N_3(A_{32} + A_{31});$$
$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = W_{14}N_1 - (B_{24}I + W_{21})N_2 + A_{32}N_3. \tag{1.19.5}$$

Ţinînd seama de relaţiile

$$N_2 \approx 0$$
$$A_{31} \ll A_{32} \tag{1.19.6}$$

şi introducînd notaţia

$$IB_{14}N_1 = I_0 \tag{1.19.7}$$

în regim staţionar, rezultă

$$N_3 = \frac{I_0}{A_{32}}. \tag{1.19.8}$$

Dacă

$$B_{32} \ll A_{32} \tag{1.19.9}$$

inversia este

$$N = N_3 - N_2 \approx N_3. \tag{1.19.10}$$

Este știut că

$$\frac{A_{ij}}{B_{ij}} = \frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3}. \tag{1.19.11}$$

În final se obține ecuația diferențială

$$\frac{du(\omega, x)}{dx} = -\alpha u(\omega, x) + \pi^2 \frac{I_0 n c^2}{\Delta\omega_0 \omega_{32}^2} L(\omega) u(\omega, x) \tag{1.19.12}$$

care guvernează evoluția densității de radiație de-a lungul fibrei optice.

1°. Ținînd seama de condițiile inițiale

$$u(\omega, x) = u(\omega, 0), \tag{1.19.13}$$

rezultă

$$u(\omega, x) = u(\omega, 0) \exp\left[\left(-\alpha + \pi^2 \frac{I_0 n c^2}{\Delta\omega_0 \omega_{32}^2} L(\omega)\right) x\right]. \tag{1.19.14}$$

Factorul de amplificare $\mathscr{L}(\omega, x)$ pe lungimea x din fibră este

$$\mathscr{L}(\omega, x) = \frac{u(\omega, x)}{u(\omega, 0)} = \exp\left[\left(-\alpha + \pi^2 \frac{I_0 n c^2}{\Delta\omega_0 \omega_{32}^2} L(\omega)\right) x\right]. \tag{1.19.15}$$

Observație: Factorul de cîștig depinde de frecvență și anume, amplificarea descrește pentru $\omega \neq \omega_{32}$ sau pentru $L(\omega) \neq 1$.

2°. Semilărgimea liniei radiației după ce a suferit o amplificare se calculează din relația

$$\mathscr{L}(\omega_r, x) = \frac{1}{2} \mathscr{L}(\omega_{32}, x) \tag{1.19.16}$$

unde

$$\omega_r - \omega_{32} = \Delta\omega. \tag{1.19.17}$$

Relația (1.19.16) este echivalentă cu

$$\exp\left[\pi^2 \frac{I_0 n c^2}{\Delta\omega_0 \cdot \omega^2} \frac{\Delta\omega_0^2}{(\omega_r - \omega_{32})^2 + \Delta\omega_0^2} x\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \exp\left[\pi^2 \frac{I_0 n c^2}{\Delta\omega_0 \cdot \omega_{32}^2} x\right]. \tag{1.19.18}$$

În cazul propagării undelor în ghiduri, amplificarea G pentru centrul liniei ω_{32} este definită prin

$$G = 10 \log_{10}\left\{\exp\left[\pi^2 \frac{I_0 n c^2}{\Delta\omega_0 \cdot \omega_{32}^2} x\right]\right\}. \tag{1.19.19}$$

Ținînd seama de (1.19.19), din (1.19.18) se va obține următoarea expresie pentru semilărgimea liniei spectrale, după ce aceasta a suferit amplificarea G

$$|\omega_r - \omega_{32}| = \Delta\omega = \Delta\omega_0 \left(\frac{3}{G-3}\right)^{1/2} \tag{1.19.20}$$

unde s-a folosit : $10 \log 2 = 3$.

Relațiile (1.19.18) și (1.19.20) neconținînd coeficientul de amplificare sau absorbție α, rezultă că îngustarea liniei spectrale la trecerea radiației printr-o fibră optică are loc independent de faptul că amplificarea totală este mai mare sau mai mică decît unitatea, adică, independent dacă

$$-\alpha + \pi^2 \frac{I_0 n c^2}{\Delta\omega_0 \cdot \omega^2{}_2} \gtrless 0 \tag{1.19.21}$$

primul caz fiind cel al amplificării radiației prin emisie stimulată și cel de al doilea fiind cel al atenuării, deoarece predomină absorbția.

3°. Intensitatea radiației care se propagă în fibra optică nu crește indefinit, la o oarecare lungime x_l ajungînd la u_l, saturația fiind cauzată — în primul rînd — de faptul că inegalitatea (1.19.9) nu mai este valabilă. Intensitatea radiației în fibra optică va crește pînă cînd $B_{32} \gg A_{32}$ și ecuația (1.19.4) devine

$$\frac{du(x)}{dx} = -\alpha u(x) + \frac{I_0 \hbar \omega_{32}}{v} \tag{1.19.22}$$

cu soluţia

$$u(x) = u_0\exp[\alpha(x_0 - x)] +$$

$$+ \frac{I_0\hbar\omega_{32}}{v}\{1 - \exp[\alpha(x_l - x)]\}. \qquad (1.19.23)$$

În cazul distanţelor mici, cînd

$$\alpha(x_l - x) \ll 1, \qquad (1.19.24)$$

se obţine

$$u(x) = \alpha\left[\frac{I_0\hbar\omega_{32}}{v} + u_0\right](x - x_l) + u_l \qquad (1.19.25)$$

adică o creştere liniară a intensităţii radiaţiei cu lungimea fibrei.

În cazul distanţelor mari, cînd

$$\alpha(x_l - x) \ll 0 \qquad (1.19.26)$$

rezultă

$$u(x) = \frac{I_0\hbar\omega_{32}}{v} = u_{max} \qquad (1.19.27)$$

adică peste o anumită lungime a fibrei, intensitatea radiaţiei care se propagă în fibră nu mai creşte.

1.20. 1°. Transmisia luminii prin fibră este privită ca un fenomen de ghidare a acesteia prin miezul fibrei care este deobicei un mediu

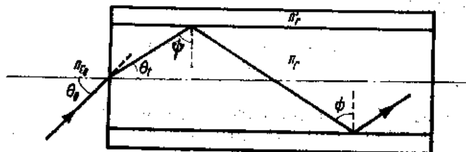


Fig. 1.20R

dielectric. Cînd diametrul fibrei este substanţial mai mare decît lungimea de undă a luminii, este adecvat să folosim metodele opticii geometrice pentru prezentarea unor proprietăţi importante ale fibrei.

În figura 1.20R se prezintă o secţiune transversală printr-o fibră, care are indicele de refracţie al miezului n_r şi al învelişului

n'_r. Cînd $n_r > n'_r$ o rază de lumină care intră în fibră dintr-un mediu cu indicele de refracție n_{0r} este reflectată în miezul fibrei la un unghi θ_i. Apoi este reflectată total la limita dintre miez și cămasa cu indicele de refracție n'_r, dacă unghiul de incidență ψ satisface condiția de reflecție totală

$$\sin\psi > \frac{n'_r}{n_r}. \tag{1.20.1}$$

O rază care trece prin axa fibrei, presupusă a fi un cilindru ideal cu secțiunea circulară, va fi din nou reflectată la unghiul ψ sub care ea cade pe cămașă.

Unghiul maxim de intrare în fibră, θ_M care este unghiul de la care raza nu va mai fi total reflectată la peretele miezului, ci va fi transmisă prin cămașă, este dat de relația

$$n_{0r}\sin\theta_{0M} = (n_r^2 - n_r'^2)^{1/2} \tag{1.20.2}$$

care rezultă din relațiile

$$\psi_M = 90^\circ - \theta_M$$

$$\sin\psi_M = \frac{n'_r}{n_r} \qquad \cos\psi_M = \sqrt{1 - \frac{n_r'^2}{n_r^2}} = \sin\theta_M$$

$$n_{0r}\sin\theta_{0M} = n_r\sin\theta_M = n_r\sqrt{1 - \frac{n_r'^2}{n_r^2}} = (n_r^2 - n_r'^2)^{1/2}.$$

Produsul $n_{0r}\sin\theta_{OM}$ poartă numele de apertura numerică a fibrei, care în cazul nostru are valoarea

$$AN = (n_r^2 - n_r'^2)^{1/2} = (1{,}55^2 - 1{,}40^2)^{1/2} \approx 0{,}65.$$

2°. Dacă unghiul dintre o rază intrată în fibră (fără să treacă prin axa fibrei) și axa fibrei este θ, valoarea limită a lui θ este determinată de refracția la intrarea și ieșirea din fibră unde ea se poate reflecta total. Legea lui Snellius determină valoarea limită θ_l prin relația

$$n_{0r}\sin\theta_{0l} = n_r\sin\theta_l$$

în care se pune condiția de reflexie totală $\theta_{0l} = 90^\circ$ și deci

$$\sin\theta_l = \frac{n_{0r}}{n_r} = \frac{1}{1{,}55}, \qquad \theta_l = \arcsin\frac{1}{1{,}55}. \tag{1.20.3}$$

3°. Pierderile la intrare în fibră și la ieșire sînt determinate de formulele lui Fresnel. Presupunînd că raza incidentă cade normal pe fața fibrei, pierderile sînt date de factorul de reflexie a cărei valoare este

$$\mathscr{R} = \frac{(n_r - n_{0r})^2}{(n_r + n_{0r})^2}. \qquad (1.20.4)$$

Expresia (1.20.4) are o valoare minimă cînd $n_r = n_{or}$. Adică pierderile sînt minime cînd fibra este imersată într-un mediu cu indicele de

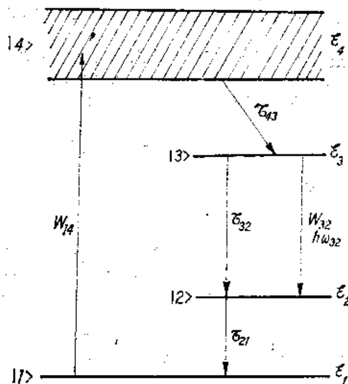


Fig. 2.1.R,a

refracție foarte apropiat de cel al miezului fibrei.

4°. $$G = 10 \log \frac{\mathscr{P}_e}{\mathscr{P}_i} = 10 \log 10 = 10 \text{ dB}.$$

2.1. În figura 2.1R, a avem:

N_i — numărul de atomi pe diferite nivele energetice $|i>$;

W_{ij} — ratele emisiei induse sau absorbției între două nivele (i, j);

$$W_{ij} = W_{ji};$$

$\tau_{ij} = \frac{1}{w_{ij}}$ — timpii de relaxare spontană între nivelele (i, j);

Ecuațiile ratelor pentru populații, vor fi

$$\frac{dN_3}{dt} = W_{13}(N_1 - N_3) - \frac{N_3 - N_2 \exp\left[\frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3}{kT}\right]}{\tau_{32}} - $$

$$- \frac{N_3 - N_1 \exp\left[\frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3}{kT}\right]}{\tau_{31}} \quad (2.1.1.)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = W_{12}(N_1 - N_2) - \frac{N_2 - N_1 \exp\left[\frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{kT}\right]}{\tau_{21}} + $$

$$+ \frac{N_3 - N_2 \exp\left[\frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3}{kT}\right]}{\tau_{32}} \quad (2.1.2.)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = W_{12}(N_2 - N_1) + W_{13}(N_3 - N_1) + $$

$$+ \frac{N_3 - N_1 \exp\left[\frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3}{kT}\right]}{\tau_{31}} + \frac{N_2 - N_1 \left[\exp \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{kT}\right]}{\tau_{21}} \quad (2.1.3)$$

În expresiile (2.1.1), (2.1.2) și (2.1.3), mărimile $N_i - N_j \exp\left[\frac{\mathscr{E}_j - \mathscr{E}_i}{kT}\right]$ reprezintă depopulările statistice cînd degenerescențele nivelelor sînt egale. Deoarece $|\mathscr{E}_j - \mathscr{E}_i| \ll kT$, rezultă

$$\frac{dN_3}{dt} = W_{13}(N_1 - N_3) - \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_3}{\tau_{31}} \quad (2.1.1a)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = W_{12}(N_1 - N_2) - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \frac{N_3}{\tau_{32}} \quad (2.1.2a)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = W_{12}(N_2 - N_1) + W_{13}(N_3 - N_1) + \frac{N_3}{\tau_{31}} + \frac{N_2}{\tau_{21}}. \quad (2.1.3a)$$

Ținînd seama de faptul că

$$N_1 + N_2 + N_3 = N_0 \tag{2.1.4}$$

avem

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0 \tag{2.1.5}$$

adică, ecuațiile care guvernează evoluția populațiilor sînt (2.1.4) și două din cele trei relații (2.1.1a), (2.1.2a) și (2.1.3a).

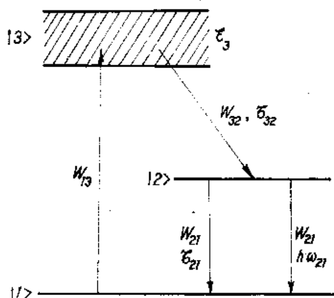


Fig. 2.1.R,b

Ecuația care guvernează densitatea de energie u a fotonilor în cavitatea interferometrică (rezonatorul optic) este

$$\frac{du}{dt} = W_{12}(N_2 - N_1) + K\frac{N_2}{\tau_{21}} - \frac{u}{\tau_c} \tag{2.1.6}$$

unde termenul $W_{12}(N_2 - N_1)$ reprezintă numărul de cuante primite prin emisia stimulată a electronilor de la $|2>$ la $|1>$; al doilea termen provine de la emisia fluorescentă de la starea $|2>$ și al treilea reprezintă pierderile datorită tuturor surselor din rezonator.

Constanta

$$K = \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2 \Delta\omega V_c} \tag{2.1.7}$$

reprezintă fracțiunea din radiația de fluorescență în modul coerent al rezonatorului de volum V_c.

În cazul unui laser cu patru nivele (fig. 2.1.R, b), dacă neglijăm termenii multiplicați cu exponențiale ai depopulărilor statistice,

avem

$$\frac{dN_4}{dt} = W_{14}(N_1 - N_4) - \frac{N_4}{\tau_{43}} - \frac{N_4}{\tau_{42}} - \frac{N_4}{\tau_{41}} \qquad (2.18)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{N_4}{\tau_{43}} - \frac{N_3}{\tau_{32}} - W_{32} \ (N_3 - N_2) - \frac{N_3}{\tau_{31}} \qquad (2.1.9)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = W_{32}(N_3 - N_2) + \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} + \frac{N_4}{\tau_{42}} \qquad (2.1.10)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = W_{14}(N_4 - N_1) + \frac{N_4}{\tau_{41}} + \frac{N_3}{\tau_{31}} + \frac{N_2}{\tau_{21}} \qquad (2.1.11)$$

$$\frac{du}{dt} = W_{32}(N_3 - N_2) + K\frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{u}{\tau_c}. \qquad (2.1.12)$$

Şi în acest caz, ecuaţiile (2.1.8)–(2.1.11) nu sînt independente, deoarece

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N_0 \qquad (2.1.13)$$

adică

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} + \frac{dN_4}{dt} = 0. \qquad (2.1.14)$$

Astfel, ecuaţiile care guvernează fenomenele fizice pentru laserii cu trei nivele, respectiv pentru laserii cu patru nivele, au forma

$$\frac{dN_3}{dt} = W_{13}(N_1 - N_3) - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = W_{12}(N_1 - N_2) + \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} \qquad (2.1.15)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = N_0$$

$$\frac{du}{dt} = B_s u(N_2 - N_1) + K\frac{N_2}{\tau_{21}} - \frac{u}{\tau_c}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
\frac{dN_4}{dt} &= W_{14}(N_1 - N_4) - \frac{N_4}{\tau_{43}} - \frac{N_4}{\tau_{42}} - \frac{N_4}{\tau_{41}}\\
\frac{dN_3}{dt} &= \frac{N_4}{\tau_{43}} - \frac{N_3}{\tau_{32}} - W_{32}(N_3 - N_2) - \frac{N_3}{\tau_{31}}\\
\frac{dN_2}{dt} &= W_{32}(N_3 - N_2) + \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} + \frac{N_4}{\tau_{42}}\\
N_1 &+ N_2 + N_3 + N_4 = N_0\\
\frac{du}{dt} &= W_{32}(N_3 - N_2) + K\frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{u}{\tau_c}.
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

După cum se observă, în cele prezentate anterior, două nivele sînt de primă importanță în acțiunea laser : $|2>$ și $|1>$ în cazul laserului cu trei nivele, respectiv $|3>$ și $|2>$ în cazul laserului cu patru nivele. Vom discuta condițiile în care este posibilă o astfel de prezentare pentru laserii cu trei, respectiv patru nivele. Introducem notațiile conform figurei 2.1.R, c :

N_s — densitatea de populație a nivelului superior,
N_i — densitatea de populație a nivelului inferior,
W_p — rata de pompaj a electronilor de la nivelul $|1>$ la $|2>$,
$W_{is} = W_{si} = W_i$ — rata de emisie stimulată și cea de absorbție,
$\tau_{si} = \tau_s$ — pierderile prin emisie spontană.

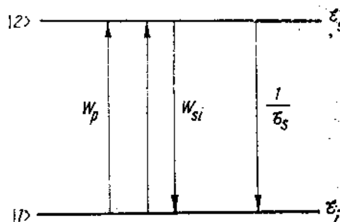


Fig. 2.1.R,c

Ecuațiile ratelor pentru populații vor fi

$$\frac{dN_s}{dt} = W_pN_i - W_{is}(N_s - N_i) - \frac{N_s}{\tau_s}$$

$$\frac{dN_i}{dt} = -W_pN_i + W_{si}(N_s - N_i) + \frac{N_s}{\tau_s}. \tag{2.1.17}$$

În expresiile (2.1.17), primul termen din dreapta se datorează pompajului de la nivelul $|i>$ la nivelul $|s>$, al doilea — emisiei stimulate sau absorbției și termenul final — emisiei spontane. Se constată că :

a) În cazul în care — rata tranziției neradiative dintre nivelul pompat și nivelul laser superior este mai mare decît ratele celorlalte

procese de tranziţie şi — pierderile spontane de la nivelul pompat la nivelul fundamental sînt neglijabile, ecuaţiile pentru populaţii, din (2.1.15), se reduc la ecuaţiile (2.1.17). Aceste condiţii se reprezintă prin relaţiile

$$\tau_{32} \ll \tau_{31}, \ \tau_{21}$$

$$N_3 \ll N_1;$$

ecuaţiile pentru populaţii din (2.1.17) corespunzînd laserului cu trei nivele pentru $W_p = W_{13}$, $\tau_s = \tau_{21}$ şi $W_{is} = W_{12}$.

b) În cazul în care —rata tranziţiei neradiative dintre nivelul pompat şi nivelul laser superior este mai mare decît rata de pompaj de la nivelul fundamental şi densitatea de atomi în starea fundamentală revine rapid la valoarea de echilibru, ecuaţiile pentru populaţii, din (2.1.16), se reduc la ecuaţiile (2.1.17).

2.2. 1°. Folosim expresia

$$N_p = \left(N_2 - N_1 \frac{g_2}{g_1}\right)_p \frac{2\omega^2 t_{sp}}{\pi c^3 t_c g_L(0)} \quad (2.2.1)$$

unde $g_L(0)$ este valoarea funcţiei de formă a liniei Lorentz:

$$g_L(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2} \quad (2.2.2)$$

la rezonanţă.

Înlocuind în (2.2.1) datele problemei se obţine

$$N_p = N_2 - N_1 \frac{g_2}{g_1} = 10^{23}\,\mathrm{m}^{-3}$$

2°. $$N(2\bar{A})/N(\bar{E}) = \exp[\Delta E/kT] = 0{,}87$$

$$N(^4A_2) + N(\bar{E}) + N(2\bar{A}) = 2\cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3} \quad (2.2.3)$$

$$N(\bar{E}) - N(^4A_2)\frac{2}{4} = 10^{23}\,\mathrm{m}^{-3}.$$

Rezolvînd sistemul se obţine:

$$N(2\bar{A}) = 0{,}454\cdot 10^{19}\,\text{cm}^{-3} = 0{,}454\cdot 10^{25}\text{m}^{-3}$$

$$N(\bar{E}) = 0{,}522\cdot 10^{25}\text{m}^{-3}$$

$$N(^4A_2) = 1{,}025\cdot 10^{25}\text{m}^{-3}.$$

Se observă că populaţia nivelului $\bar{E}$ este mai mică decît a nivelului $^4A_2$, totuşi oscilaţia e posibilă datorită degenerescenţei care duce chiar în aceste condiţii la îndeplinirea condiţiei de prag.

3°. $$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = \omega t_c.$$

2.3. Să presupunem că o moleculă de apă aflată în starea de vibraţie n se ciocneşte cu o moleculă de CO_2 aflată în starea de vibraţie m (spre exemplu starea 10^00). Probabilitatea de excitare a moleculei de apă către starea $n+1$ prin trecerea, în acelaşi timp, a moleculei de CO_2 în starea $m-1$ este proporţională cu produsul $B_{n,n+1}C_{m,m-1}$, unde $B_{n,n+1}$ este probabilitatea de tranziţie a moleculei de apă din starea n în starea $n+1$, iar $C_{m,m-1}$ este probabilitatea de tranziţie a moleculei de CO_2 din starea m în starea $m-1$.

Fluxul de energie la excitarea unei molecule de apă pe seama ciocnirilor cu moleculele de CO_2 este dat de relaţia

$$\frac{d\mathscr{E}_{H_2O}}{dt} = a\hbar\omega' B_{n,n+1}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m,m-1}N_m \qquad (2.3.1)$$

unde: a este un parametru de ciocnire determinat de temperatura T_0, N_m — numărul de molecule de CO_2 în starea de vibraţie m, aflate în unitatea de volum, $\hbar\omega'$ — energia cuantei care este absorbită la tranziţia moleculei de apă între cele două nivele n şi $n+1$. Se presupune că cuanta de energie de vibraţie $\hbar\omega''$ absorbită de apă este egală cu cuanta de energie cedată de molecula de CO_2.

În mod analog, pentru rata de scădere a energiei unei molecule de apă pe seama ciocnirilor cu moleculele de CO_2 putem scrie

$$\frac{d\mathscr{E}'_{H_2O}}{dt} = a\hbar\omega' B_{n,n-1}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m,m+1}N_m. \qquad (2.3.2)$$

Prin urmare, rata de tranziţie a energiei către toate moleculele de apă din unitatea de volum se scrie

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{H_2O}^{uv}}{\mathrm{d}t}\right)_2 = a\hbar\omega'\left[\sum_{n=0}^{\infty} N_n B_{n,n+1} \sum_{m=0}^{\infty} N_m C_{m,m-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} N_n B_{n,n-1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,m+1} N_m \right] \quad (2.3.3)$$

unde N_n este numărul de molecule de H_2O în starea de vibraţie n, aflate în unitatea de volum.

Presupunînd moleculele sub formă de oscilatori armonici se poate scrie că

$$B_{n,n+1} = (n+1)\ B_0 \qquad C_{m,m+1} = (m+1)\ C_0$$

$$B_{n,n-1} = nB_0 \qquad C_{m,m-1} = mC_0$$

şi relaţia (2.3.3) devine

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{H_2O}^{uv}}{\mathrm{d}t}\right)_2 = a\hbar\omega'\ B_0 C_0\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(m-n)\, N_m N_n\right]\cdot \quad (2.3.4)$$

Dacă presupunem că populaţiile nivelelor sînt distribuite în acord cu legea lui Boltzmann, adică

$$N_m = N_{CO_2}\ \exp\left[-\frac{\hbar\omega}{kT}\right] \text{ şi } N_n = N_{H_2O}\ \exp\left[-\frac{\hbar\omega'}{kT'}\right] \quad (2.3.5)$$

relaţia (2.3.4) se scrie şi sub forma

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{H_2O}^{uv}}{\mathrm{d}t}\right)_2 = bN_{CO_2}B_0C_0[\mathscr{E}_{H_2O}^{uv}(T) - \mathscr{E}_{H_2O}^{uv}(T')] \quad (2.3.6)$$

unde $\mathscr{E}_{H_2O}^{uv}(T)$ reprezintă energia de vibraţie a vaporilor de apă din unitatea de volum aflaţi la temperatura T, $\mathscr{E}_{H_2O}^{uv}(T')$ este energia de vibraţie reală a vaporilor de apă din unitatea de volum şi b o constantă care poate fi considerată unitate ca şi în cazul relaţiei din enunţul problemei.

Prin urmare, rata de relaxare a energiei moleculelor de CO_2 din cauza ciocnirilor cu moleculele de H_2O este

$$\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right)_2 = -\left(\frac{d\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}}{dt}\right)_2 = -\left(\frac{p_0}{\tau_{12}}\right)\left[\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T) - \mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T')\right] \quad (2.3.7)$$

deoarece $N_{CO_2} \sim p_0$ şi $\frac{1}{\tau_{12}} = B_0 C_0$.

Pentru a calcula rata de relaxare a energiei moleculelor de CO_2 de pe nivelul 10°0 în prezenţa moleculelor de apă trebuie să luăm în considerare nu numai expresia $\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right)_1$ ci şi expresia $\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right)_2$, adică

$$\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right) = \left(\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right)_2 = \frac{p_0}{\tau_{11}}\left[\mathscr{E}_{(T)} - \mathscr{E}_{(T_0)}\right] -$$

$$-\left(\frac{p_0}{\tau_{12}}\right)\left[\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T) - \mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T')\right]. \quad (2.3.8)$$

Însă moleculele de apă au o rată de relaxare a energiei $\left(\frac{d\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}}{dt}\right)_1$ dată de o relaţie analogă cu cea pentru $\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right)_1$ în cazul moleculelor de CO_2 în absenţa apei. Prin urmare

$$\left(\frac{d\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}}{dt}\right)_1 = \frac{p_1}{\tau_{22}}\left[\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T') - \mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T_0)\right] \quad (2.3.9)$$

unde τ_{22} este timpul de relaxare a vaporilor de apă la temperatura de 330°K şi presiunea 1 torr, p_1 este presiunea parţială a vaporilor de apă exprimată în torri, iar $\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T_0)$ — energia de vibraţie a moleculelor de H_2O în cazul în care se presupune o repartiţie de echilibru a moleculelor de H_2O după gradele de libertate de translaţie.

Ecuaţia de relaxare pentru moleculele de apă din mediul activ se poate scrie sub forma:

$$\frac{d\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}}{dt} = \left(\frac{d\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}}{dt}\right)_2 = \frac{p_0}{\tau_{12}}\left[\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T) - \mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T')\right] -$$

$$-\frac{p_1}{\tau_{22}}\left[\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T') - \mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T_0)\right]. \quad (2.3.10)$$

În regim staționar avem

$$\frac{d\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}}{dt} = 0.$$

Folosind relația (2.3.10) pentru regim staționar obținem:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\frac{p_0}{\tau_{11}}[\mathscr{E}(T) - \mathscr{E}(T_0)] + \frac{p_1}{\tau_{22}}[\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T') - \mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T_0)]. \quad (2.3.11)$$

Deoarece în mediul activ presiunea parțială a vaporilor de apă este destul de mică în raport cu presiunea bioxidului de carbon și deoarece τ_{12} este de asemenea mic în raport cu τ_{22}, T' este bine aproximat de T. Dacă am înlocuit T cu T' atunci se înțelege că cuanta de vibrație a apei este egală cu cuanta de vibrație a CO_2 și

$$\mathscr{E}^{uv}_{H_2O}(T') = \frac{p_1}{p_0}\mathscr{E}(T). \quad (2.3.12)$$

Introducînd (2.3.12) în (2.3.11) obținem

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -p_0\left(\frac{1}{\tau_{11}} + \frac{1}{\tau_{22}}\frac{p_1^2}{p_0^2}\right)[\mathscr{E}(T) - \mathscr{E}(T_0)] =$$

$$= -136\left[\frac{1}{3\cdot 10^{-3}} + \frac{1}{3\cdot 10^{-7}}\frac{(27,2)^2}{(136)^2}\right][600 - 1,3] \approx 4\cdot 10^3 \text{ J/m}^3\cdot\text{s}.$$

Comparînd relația (2.3.13) cu relația din enunț găsim că timpul de relaxare efectiv τ al nivelului 10°0 al CO_2 în prezența vaporilor de apă este dat de relația

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{11}} + \frac{1}{\tau_{22}}\frac{p_1^2}{p_0^2} = \frac{1}{3\cdot 10^{-3}} + \frac{1}{3.10^{-7}}\left(\frac{0,2}{1}\right)^2$$

$$\tau \approx 1,5\cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

2.4. Vom scrie ecuațiile ratelor pentru nivelele gazului A

$$\frac{dN_3^A}{dt} = N_1^A\left(\frac{1}{\theta_{13}} + \frac{1}{t_{BA}}\right) - N_3^A\left(\frac{1}{\theta_3} + \frac{1}{t_{BA}} + \frac{1}{\tau_3}\right) \quad (2.4.1)$$

unde

$$\frac{1}{\theta_3} = \frac{1}{\theta_{31}} + \frac{1}{\theta_{32}} \text{ și } \frac{1}{\tau_3} = \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} \quad (2.4.2)$$

$\frac{1}{\tau_3}$ fiind rata de tranziție globală per atom de pe nivelul $|3\rangle$ datorită ciocnirilor electronice de speța a 2-a.

S-a neglijat popularea nivelului $|3\rangle$ prin excitarea de pe nivelul $|2\rangle$ deoarece rata acestui fenomen este proporțională cu N_2^A și deci este mult mai mică decît ceilalți termeni din ecuația (2.4.1).

Pentru nivelul inferior al tranziției laser avem

$$\frac{dN_2^A}{dt} = \frac{N_1^A}{\theta_{12}} + N_3^A\left(\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\theta_{32}}\right) - N_2^A\left(\frac{1}{\theta_{21}} + \frac{1}{\tau_{21}}\right). \qquad (2.4.3)$$

Condiția de inversie de populație este

$$N_3^A > N_2^A. \qquad (2.4.4)$$

Considerînd cazul staționar, din ecuațiile (2.4.1) și (2.4.3) se poate calcula raportul populațiior nivelelor $|3\rangle$ și $|2\rangle$ eliminînd N_1

$$N_3^A\left(\frac{\frac{1}{\theta_3} + \frac{1}{t_{AB}} + \frac{1}{\tau_3}}{\frac{1}{\theta_{13}} + \frac{1}{t_{AB}}}\frac{1}{\theta_{12}} + \frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\theta_{32}}\right) = N_2^A\left(\frac{1}{\theta_{21}} + \frac{1}{\tau_{21}}\right). \qquad (2.4.5)$$

$\frac{N_3^A}{N_2^A} > 1$ conform condiției (2.4.4.), ceeace este echivalent cu

$$\left(\frac{1}{\theta_{21}} + \frac{1}{\tau_{21}}\right)\left(\frac{1}{\theta_{13}} + \frac{1}{t_{AB}}\right) > \left[\left(\frac{1}{\theta_3} + \frac{1}{t_{AB}} + \frac{1}{\tau_3}\right)\frac{1}{\theta_{12}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\theta_{32}}\right)\left(\frac{1}{\theta_{13}} + \frac{1}{t_{AB}}\right)\right]. \qquad (2.4.6)$$

Ecuația (2.4.6) se mai scrie

$$\frac{\theta_{13}}{t_{BA}}\left(\frac{1}{\theta_{21}} + \frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_{32}} - \frac{1}{\theta_{32}}\right) - \frac{1}{\theta_{13}}\cdot\frac{1}{t_{AB}} > \frac{\theta_{13}}{\theta_{12}}\left(\frac{1}{\theta_3} + \frac{1}{\tau_3}\right) -$$

$$- \frac{1}{\theta_{21}} - \frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_{23}} + \frac{1}{\theta_{32}} \qquad (2.4.7)$$

sau, înmulţind peste tot cu θ_{21}, obţinem

$$\frac{\theta_{13}}{t_{AB}}\left[1+\theta_{21}\left(\frac{1}{\tau_{21}}-\frac{1}{\tau_{32}}-\frac{1}{\theta_{32}}\right)-\frac{1}{\theta_{13}}\,\frac{\theta_{21}}{\theta_{12}}\,\frac{t_{BA}}{t_{AB}}\right]>$$

$$>\theta_{31}\,\frac{\theta_{13}}{\theta_{31}}\,\frac{\theta_{21}}{\theta_{12}}\left(\frac{1}{\theta_{3}}+\frac{1}{\tau_{3}}\right)-1+\theta_{21}\left(\frac{1}{\theta_{32}}+\frac{1}{\tau_{32}}-\frac{1}{\tau_{21}}\right). \qquad (2.4.8)$$

Conform teoriei ciocnirilor

$$\frac{t_{BA}}{t_{AB}}=\frac{N_1^B}{N_3^B} \qquad (2.4.9)$$

iar pentru a afla raportul $\frac{\theta_{ij}}{\theta_{ji}}$ scriem ecuaţia pentru populaţia unui nivel care ar fi modificată numai prin ciocniri electronice

$$\frac{dN_i}{dt}=\sum_j\left(\frac{N_j}{\theta_{ji}}-\frac{N_i}{\theta_{ij}}\right). \qquad (2.4.10)$$

În situaţia în care se stabileşte un echilibru termodinamic la temperatura T numărul de atomi pe fiecare nivel trebuie să fie staţionar, deci

$$\sum_j\left(\frac{N_j^e}{\theta_{ji}}-\frac{N_i^e}{\theta_{ij}}\right)=0 \qquad (2.4.11)$$

pentru orice i, unde indicele superior e arată că este vorba de valoarea de echilibru. Ţinînd cont de principiul echilibrului detaliat, conform căruia energia cedată printr-o tranziţie trebuie să fie compensată de energia absorbită prin tranziţia în sens invers,

$$\frac{N_j^e}{\theta_{ji}}-\frac{N_i^e}{\theta_{ij}}=0 \qquad (2.4.12)$$

oricare ar fi i şi j.

Din ecuaţia (2.4.12) rezultă

$$\frac{\theta_{ij}}{\theta_{ji}}=\exp\left(-\frac{\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_j}{kT}\right) \qquad (2.4.13)$$

unde am folosit faptul că populațiile de echilibru sînt descrise de distribuția Boltzmann și am neglijat degenerarea nivelelor.

Considerînd energia stărilor fundamentale nulă, $E_1 = 0$, ecuația (2.4.13) se va particulariza în

$$\frac{\theta_{21}}{\theta_{12}} = \exp\left[-\frac{\mathscr{E}_2}{kT}\right] \tag{2.4.14}$$

și

$$\frac{\theta_{13}}{\theta_{31}} = \exp\left(\frac{\mathscr{E}_3}{kT}\right). \tag{2.4.15}$$

Introducînd ecuațiile (2.4.9), (2.4.14) și (2.4.15) în ecuația (2.4.8) obținem

$$\frac{\theta_{13}}{t_{BA}}\left[1 - \frac{N_1^B}{N_3^B}\exp\left(-\frac{\mathscr{E}_2}{kT}\right) + \theta_{21}\left(\frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_{32}} - \frac{1}{\theta_{32}}\right)\right] >$$

$$> \theta_{31}\left(\frac{1}{\theta_3} + \frac{1}{\tau_3}\right)\exp\left(\frac{\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_2}{kT}\right) - 1 + \theta_{21}\left(\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\theta_{32}} - \frac{1}{\tau_{21}}\right). \tag{2.4.16}$$

Ținînd seama de faptul că $\frac{1}{\theta_{32}}$ se poate neglija în raport cu $\frac{1}{\tau_{32}}$ iar $\frac{\theta_{31}}{\theta_3} \approx 1$ relația (2.4.16) se poate scrie simplifcat

$$\frac{\theta_{31}}{t_{BA}}\left[1 - \frac{N_1^B}{N_3^B}\exp\left(-\frac{\mathscr{E}_2}{kT}\right) + \theta_{21}\left(\frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_{32}}\right)\right] >$$

$$\left(\frac{\theta_{31}}{\tau_3} + 1\right)\exp\left(\frac{\mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_2}{kT}\right) - 1 - \theta_{21}\left(\frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_{32}}\right). \tag{2.4.17}$$

Egalînd cu zero cele două paranteze drepte din fiecare membru putem considera că se obțin ecuațiile a două drepte în sistemul de coordonate

$$\frac{\theta_{31}}{\tau_3}, \quad \theta_{21}\left(\frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_{32}}\right).$$

Ecuaţiile acestor drepte vor fi deci

$$\theta_{21}\left(\frac{1}{\tau_{21}}-\frac{1}{\tau_{32}}\right)=\frac{N_1^B}{N_3^B}\exp\left(-\frac{\mathscr{E}_2}{kT}\right)-1 \qquad (2.4.18)$$

şi

$$\frac{\theta_{31}}{\tau_3}=\frac{\theta_{21}\left(\frac{1}{\tau_{21}}-\frac{1}{\tau_{32}}\right)+1-L(T)}{L(T)} \qquad (2.4.19)$$

unde $L(T)=\exp\left(\frac{\mathscr{E}_3-\mathscr{E}_2}{kT}\right)$,

Cele două drepte (2.4.18) şi (2.4.19) împart planul $\frac{\theta_{31}}{\tau_3}$, $\theta_{21}\left(\frac{1}{\tau_{21}}-\frac{1}{\tau_{32}}\right)$ în patru părţi aşa cum se vede în figura 2.4R.

Ecuaţia (2.4.17) va fi satisfăcută pentru orice valori ale cantităţii t_{BA} în cazul cînd membrul drept este negativ iar membrul stîng este pozitiv. Această situaţie este satisfăcută de punctele zonei notate cu *I*, iar în acest caz inversia de populaţie nu este legată de prezenţa gazului *B*, ea existînd şi pentru $t_{BA}=\infty$ (deci rata transferului de energie între atomii celor două gaze este nulă).

În regiunea *II* inversia de popualţie este realizată graţie prezenţei gazului *B* deoarece ambele paranteze din ecuaţia (2.4.17) fiind pozitive, inegalitatea se poate realiza numai dacă $t_{BA}<\infty$ are valoare potrivită.

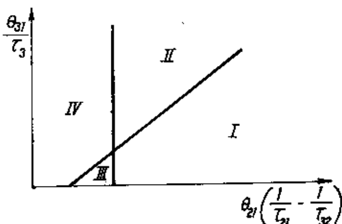


Fig. 2.4 R

În regiunea *IV* inversia este imposibil de realizat deoarece paranteza din membrul stîng este negativă, iar cea din membrul drept este pozitivă.

În sfîrşit, în regiunea *III* prezenţa gazului *B* împiedică realizarea inversiei de populaţie.

În concluzie parametrii caracteristici ai celor două gaze trebuie să situeze amestecul în zona *III* a diagramei.

2.5. 1°. Dacă $N_i(i=1, 2, 3)$ sînt populaţiile celor trei nivele, $w_{ij}(i, j=1, 2, 3, i\neq j)$ — probabilităţile de tranziţie între nivelele i şi j, W_p — rata de pompaj şi W_s — rata de tranziţie pentru emi-

sia stimulată, ecuațiile ratelor pentru un maser cu trei nivele se scriu

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = w_{13}N_1 - w_{31}N_3 + w_{23}N_2 - w_{32}N_3 +$$

$$+ W_p(N_1 - N_3) + W_s(N_2 - N_3) \tag{2.5.1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = w_{12}N_1 - w_{21}N_2 + w_{32}N_3 + w_{23}N_2 + S(N_3 - N_2) \tag{2.5.1b}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = w_{21}N_2 - w_{12}N_1 + w_{31}N_3 - w_{13}N_1 + P(N_3 - N_1). \tag{2.5.1c}$$

În lipsa pompajului și a emisiei stimulate, cînd $W_p = W_s = 0$; populațiile nivelelor, conform distribuției Boltzmann, verifică proporționalitatea

$$N_1 : N_2 : N_3 = \exp\left[-\frac{\mathscr{E}_1}{kT}\right] : \exp\left[-\frac{\mathscr{E}_2}{kT}\right] : \exp\left[-\frac{\mathscr{E}_3}{kT}\right]. \tag{2.5.2}$$

La echilibru termodinamic, numărul particulelor (molecule, atomi) ce trec de pe nivelul i pe nivelul j este egal cu numărul acelora ce trec de pe nivelul j pe nivelul i, adică

$$\begin{aligned} N_1 w_{12} &= N_2 w_{21} \\ N_2 w_{23} &= N_3 w_{32} \\ N_1 w_{13} &= N_3 w_{31}. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Înlocuind (2.5.3) în (2.5.2) și dezvoltînd în serie exponențialele se obțin relațiile dintre probabilitățile de tranziție

$$w_{12} = \frac{N_2}{N_1} w_{21} = w_{21} \exp\left[-\frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{kT}\right] = w_{21} \exp\left[-\frac{\hbar\Omega_{21}}{kT}\right] \approx$$

$$\approx w_{21}\left(1 - \frac{\hbar\Omega_{21}}{kT}\right) \tag{2.5.4a}$$

şi analog

$$w_{13} \approx w_{31}\left(1 - \frac{\hbar\Omega_{31}}{kT}\right) \qquad (2.5.4b)$$

şi

$$w_{23} \approx w_{32}\left(1 - \frac{\hbar\Omega_{32}}{kT}\right). \qquad (2.5.4c)$$

Dezvoltarea în serie a exponenţialei a fost posibilă deoarece $\hbar\Omega_{ij} \ll kT$.

Într-adevăr, la un laser $\frac{\Omega_{ij}}{2\pi} \approx 10^{10}$ Hz şi pentru cazul temperaturii normale ($T = 300°K$)

$$\frac{\hbar\Omega_{ij}}{kT} \approx 10^{-3}.$$

În cazul staţionar, $\frac{dN_i}{dt} = 0$ şi $N_1 \approx N_2 \approx N_3 = \frac{N_t}{3}$.

Ecuaţiile ratelor devin:

$$(w_{31} + w_p)(N_1 - N_3) + (w_{32} + w_s)(N_2 - N_3) = \frac{N\hbar}{3kT}(w_{31}\Omega_{31} + w_{32}\Omega_{32}) \qquad (2.5.5a)$$

$$w_{21}(N_1 - N_2) + (w_{32} + w_s)(N_3 - N_2) = \frac{N\hbar}{3kT}(w_{21}\Omega_{21} + w_{32}\Omega_{32}) \qquad (2.5.5b)$$

$$W_{21}(N_2 - N_1) + (W_{31} + W_p)(N_3 - N_1) = \frac{N\hbar}{3kT}(W_{21}\Omega_{21} + W_{31}\Omega_{31}). \qquad (2.5.5c)$$

Acestea sînt chiar ecuaţiile lui Kirchhoff aplicate unui circuit format din trei generatoare şi trei rezistenţe legate ca în fig. 2.5R, a, unde $(N_i - N_j)$ corespund la diferenţe de potenţial, W_p, W_s, şi W_{ij} sînt conductanţele electrice, iar factorii $\frac{N\hbar}{3kT} W_{ij}\Omega_{ij}$ corespund curenţilor constanţi debitaţi de generatoare.

2°. În cazul saturării pompajului, stările 1 şi 3 îşi egalează populaţiile ($N_1 = N_3$), ceea ce corespunde la scurtcircuitarea lui N_1 şi N_3. Aceasta înseamnă că în mediul activ maser s-a realizat temperatura negativă în raport cu nivelele 2 şi 3, condiţie necesară pentru amplifcarea radiaţiei electromagnetice de frecvenţă Ω_{32}.

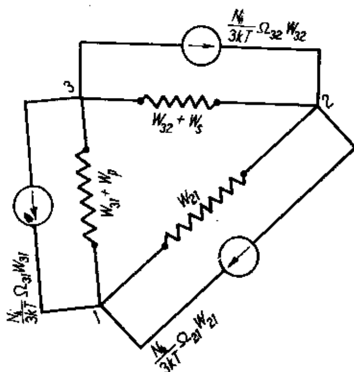


Fig 2.5R, a

În circuitul electric echivalent aceasta corespunde la o valoare infinită a conductanţei W_p şi în circuit rămîn un singur generator şi două rezistenţe electrice legate ca în figura 2.5R, b.

Înlocuind în ecuaţiile ratelor condiţia ca $N_1 = N_3$, rămîne o singură ecuaţie

$$(N_3 - N_2)(W_{32} + W_{21} + W_s) = \frac{Nh}{3kT}(\Omega_{21}W_{21} - \Omega_{32}W_{32}) \tag{2.5.6}$$

care este chiar ecuaţia lui Kirchhoff pentru noul circuit.

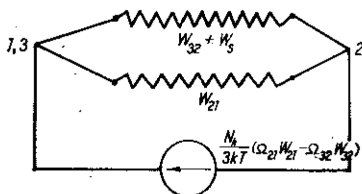


Fig.2.5R, b

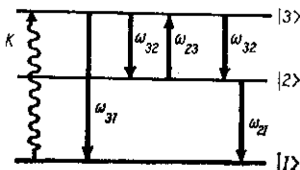


Fig. 2.6R

2.6. Să notăm cu N_1 populaţia nivelului fundamental al sodiului notat pe figura 2.6R cu $|1\rangle$, N_2 populaţia nivelului inferior laser notat pe figură cu $|2\rangle$ şi, în sfîrşit, cu N_3 populaţia nivelului superior laser. Cu w_{31}, w_{32} şi w_{21} sînt notate probabilităţile tranziţiilor spontane între aceste nivele. Cu W_{23} este notată probabilitatea absorbţiei unui foton care are frecvenţa dată de relaţia $\hbar\omega_{23} = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2$; W_{32} este probabilitatea emisiei stimulate la tranziţia între nivelele

$|3\rangle$ şi $|2\rangle$. K este probabilitatea de pompaj a atomilor din starea $|1\rangle$ în starea $|3\rangle$. Acest pompaj se face în cazul de faţă, în principal, prin ciocnirea atomilor de cadmiu din starea metastabilă 5^3P_0 cu atomii de sodiu din starea fundamentală $|1\rangle$.

Pentru o stare staţionară dinamică a sisteumlui vom putea scrie sistemul de ecuaţii care exprimă variaţia în timp a numerelor N_1, N_2 şi N_3 sub forma (vezi fig. 2.6R)

$$\frac{dN_3}{dt} = KN_1 + W_{23}N_2 - w_{32}N_3 - W_{32}N_3 - w_{31}N_3 = 0 \quad (2.6.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = w_{32}N_3 + W_{32}N_3 - w_{21}N_2 - W_{23}N_2 = 0 \quad (2.6.2)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = w_{31}N_3 + w_{21}N_2 - KN_1 = 0 \quad (2.6.3)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = N_t \quad (2.6.4)$$

unde N_t este numărul total de atomi de sodiu din cele 3 nivele.

Numărul de fotoni generaţi de un astfel de sistem la tranziţiile atomilor de sodiu din starea $|3\rangle$ în starea $|2\rangle$ va fi

$$N = W_{32}N_3 - W_{23}N_2. \quad (2.6.5)$$

Excesul de populaţie al nivelului $|3\rangle$ faţă de nivelul $|2\rangle$ este

$$N_L = N_3 - \frac{g_3}{g_2}N_2. \quad (2.6.6)$$

Să exprimăm N în funcţie de K, N_t, N_L, w_{32}, w_{31} şi w_{21}. Din relaţiile (2.6.4) şi (2.6.6) obţinem

$$N_1 + \left(1 + \frac{g_3}{g_2}\right)N_2 + N_L + N_t \quad (2.6.7)$$

iar din relaţiile (2.6.3) şi (2.6.6) avem

$$w_{31}N_L + \left(w_{21} + \frac{g_3}{g_2}w_{31}\right)N_2 - KN_1 = 0. \quad (2.6.8)$$

Pe baza relaţiilor (2.6.2), (2.6.5) şi (2.6.6) putem scrie

$$N = \left(w_{21} - \frac{g_3}{g_2}w_{32}\right)N_2 - w_{32}N_L. \quad (2.6.9)$$

Prin amplificarea relaţiei (2.6.7) cu K şi adunarea rezultatului cu relaţia (2.6.8) obţinem

$$\left(1 - \frac{g_3}{g_2}\right)N_2K + KN_L + w_{31}N_L + \left(w_{21} + \frac{g_3}{g_2}w_{31}\right)N_2 = KN_t$$

sau

$$N_2 = \frac{K(N_t - N_L) - w_{31} N_L}{K\left(1 + \frac{g_3}{g}\right) + \left(w_{21} + \frac{g_3}{g} w_{31}\right)}. \tag{2.6.10}$$

Dacă introducem relaţia (2.6.10) în (2.6.9) şi ordonăm după N_L şi N_t obţinem

$$N = \frac{KN_t\left(w_{21} - \frac{g_3}{g_2} w_{32}\right) - N_L\,[K(w_{21} + w_{32}) + w_{21}(w_{31} + w_{32})]}{K\left(1 + \frac{g_3}{g_2}\right) + \left(w_{21} + \frac{g_3}{g_2} w_{32}\right)}. \tag{2.6.11}$$

Pentru ca sistemul să genereze continuu trebuie ca

$$w_{21} - \frac{g_3}{g_2} w_{32} > 0 \tag{2.6.12}$$

deoarece în caz contrar $N < 0$. Condiţia (2.6.12) exprimă faptul că nivelul inferior laser trebuie să se golească mult mai rapid decît cel superior.

În relaţia (2.6.11) intervine parametrul de pompaj K care menţine efectul. Valoarea minimă a lui K se determină din ecuaţia (2.6.11) punînd condiţia ca $N > 0$ pentru un N_L dat şi pentru o temperatură dată a mediului situat într-o cavitate cu factorul de calitate Q dat. Din această condiţie obţinem

$$K > \frac{(w_{31} + w_{32})w_{21}N_L}{N_t\left(w_{21} - \frac{g_3}{g_2} w_{32}\right) - N_L(w_{32} + w_{21})}. \tag{2.6.13}$$

Pentru simplificarea calculelor putem considera că $w_{21} \gg w_{32}$, $N_t \gg N_L$ şi relaţia (2.6.13) devine

$$K > (w_{31} + w_{32})N_L/N_t \tag{2.6.14}$$

condiţie care trebuie realizată practic prin pompaj pentru ca laserul să funcţioneze.

În cazul nostru condiţia (2.6.12) este satisfăcută deoarece $50 \cdot 10^6 - \frac{2}{3}\, 0{,}16 \cdot 10^6 > 0$, iar condiţia (2.6.14) duce la

$$K > (9{,}2 \cdot 10^6 + 0{,}16 \cdot 10^6)\frac{N_L}{N_t}$$

care, în aproximaţia că w_{32} este neglijabil faţă de w_{31}, devine

$$K > \frac{9{,}2\cdot 10^6 N_L}{N_t}. \qquad (2.6.15)$$

Dar în condiţia de autooscilaţie a laserului avem

$$N \geqslant \frac{4\cdot\sqrt{2\pi}\cdot(1-R)l^3\tau}{3\lambda^3}\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2} \qquad (2.6.16)$$

unde τ este timpul de viaţă al nivelului $|3\rangle$ pe care îl luăm aproximativ 10^{-6} s, λ — lungimea de undă laser egală cu 90200 Å; $T = 300°$K; k — constanta lui Boltzmann şi m — masa moleculară a gazului. Numeric relaţia (2.6.16) dă

$$N_L \geqslant \frac{4\sqrt{2\pi}\,(1-0{,}99)\,(10^{-2})^3\,10^{-6}}{3(90200\cdot 10^{-10})^3}\,(10^9) \approx 10^8 \text{ atomi} \qquad (2.6.17)$$

şi relaţia (2.6.15) duce la

$$K \geqslant \frac{9{,}2\cdot 10^6\cdot 10^8}{10^{21}} \geqslant 10^7. \qquad (2.6.18)$$

Luînd pentru K valoarea 10^7 în relaţia (2.6.11) obţinem numărul de fotoni emişi stimulat

$$N = \frac{10^7\cdot 10^{23}\left(50\cdot 10^6-\frac{2}{3}9{,}1\cdot 10^6\right)-10^{14}[10(50\cdot 10^6+9{,}1\cdot 10^6)+50\cdot 10^6(0{,}16\cdot 10^6+9{,}1\cdot 10^6)]}{10\left(1+\frac{3}{2}\right)+\left(50\cdot 10^6+\frac{3}{2}0{,}16\cdot 10^6\right)} \approx 10^{23}$$

iar pentru puterea emisă la $\lambda = 90200$ Å obţinem

$$\mathscr{P}_0 = \frac{hc}{\lambda}N = \frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{90200\cdot 10^{-10}}\cdot 10^{23} \approx 20\ W/\text{m}^3.$$

2.7. 1°. Chelaţii sînt sisteme complexe în care ionul de pămînt rar e legat de moleculele organice (liantul) prin aşa-numitele legături de „cleşte”.

Mediul activ al unui laser cu ioni de pămînt rar Eu^{3+} în benzoil-acetat de Eu e un sistem format din cinci nivele energetice, în care nivelul $|1\rangle$ este starea fundamentală, nivelul $|2\rangle$ este o stare excitată de singlet a liantului, nivelele $|3\rangle$ și $|3'\rangle$ sînt stări excitate de triplet ale liantului, nivelul $|4\rangle$ este o stare excitată a ionului de pămînt rar, iar nivelul $|5\rangle$ e o stare oscilantă (fig. 2.7R).

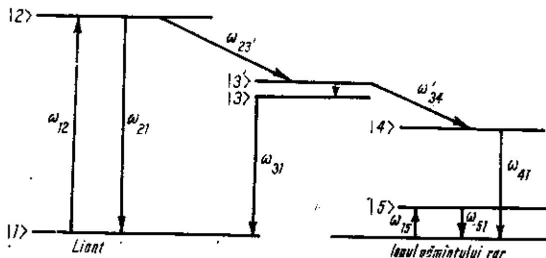


Fig. 2.7R

1°. Pentru apariția efectului laser în tranziția $|4\rangle \to |5\rangle$, nivelul $|4\rangle$ trebuie populat în așa fel, încît amplificarea radiației la o trecere prin mediul activ de lungime l să depășească pierderile, adică

$$\alpha l \geqslant (1 - r) \tag{2.7.1}$$

unde α este coeficientul de amplificare (cîștigul), iar r coeficientul de reflexie al oglinzilor.

Coeficientul de amplificare e legat de concentrația de atomi excitați prin relația

$$\alpha = \frac{n_r K \lambda^4 W_{45}}{4\pi^2 c \Delta\lambda}\left(N_4 - \frac{g_5}{g_4} N_5\right) \tag{2.7.2}$$

unde λ și $\Delta\lambda$ sînt lungimea de undă și semilărgimea liniei, c — viteza luminii, n_r — indicele de refracție, g_4 și g_5 — ponderile statistice ale nivelelor $|4\rangle$ și $|5\rangle$, K — partea din moleculele aflate pe nivelul $|4\rangle$ care trec stimulat pe nivelul $|5\rangle$, W_{45} — probabilitatea de tranziție indusă între nivelele $|4\rangle$ și $|5\rangle$.

Densitatea de populație de pe nivelul $|5\rangle$, este proporțională conform distribuției Boltzmann, cu

$$N_5 \sim N_0 \exp\left[-\frac{\hbar\Omega_{51}}{kT}\right] = 10^{-8} N_0 \tag{2.7.3}$$

deci poate fi neglijată din ecuațiile (2.7.1) și (2.7.2) și obținem pentru densitatea de populație N_4:

$$N_4 = \frac{4\pi^2 c\Delta\lambda(1-r)}{n_r k\lambda^4 W_{45} l} = \frac{4(3{,}14)^2 3\cdot 10^8\cdot 8\cdot 10^{-10}\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 5\cdot 10^{-4}}{1{,}5\cdot 0{,}1(6130\cdot 10^{-10})^4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1} =$$

$$= 1{,}18\cdot 10^{23} \text{ molecule}\cdot\text{m}^{-3}. \tag{2.7.4}$$

Știm că densitatea de populație a nivelului excitat e proporțională cu numărul de cuante absorbite în timpul de viață al stării excitate

$$N_4 = \eta\frac{I\tau_4\Gamma}{\hbar\omega} \tag{2.7.5}$$

unde I este intensitatea pompajului, τ_4 timpul de viață al nivelului excitat, ω — frecvența radiației absorbite, Γ — coeficienul de absorbție, η — eficiența cuantică.

De aici,

$$I = \frac{N_4\hbar\omega}{\eta\tau_4\Gamma} = \frac{1{,}18\cdot 10^{23}\cdot 6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 10^{15}}{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}8\cdot 5\cdot 10^{-4}\cdot 5000} = 3\cdot 10^4\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}.$$

2.8. Puterea emisă de atomii din unitatea de volum este

$$\mathscr{P}_{em.} = \alpha I = \alpha u\frac{c}{n_r} \tag{2.8.1}$$

astfel încît puterea totală emisă se obține integrînd (2.8.1) peste volumul cavității (presupusă umplută de mediul activ)

$$\mathscr{P}_{tot.\,em.} = \frac{\alpha c}{n_r}\int_V u\,\mathrm{d}v \tag{2.8.2}$$

sau

$$\frac{\mathscr{P}_{tot.\,em.}}{\int_V u\,\mathrm{d}v} = \alpha\frac{c}{n_r} = \frac{c\alpha_0}{n_r}\,\frac{1}{1+\frac{I}{I_{sat}}} = \frac{c\alpha_0}{n_r}\,\frac{1}{1+\frac{\int_V u\,\mathrm{d}v}{\xi}} \tag{2.8.3}$$

unde am notat ξ parametrul de saturare pentru care α devine egal cu $\frac{\alpha_0}{2}$.

Din definiția factorului de calitate,

$$\frac{\omega}{Q}=\frac{\mathscr{P}_{tot.\,disip.}}{\int_V u\,dv} \tag{2.8.4}$$

unde $\mathscr{P}_{tot.\,disip.}$ este puterea totală disipată inclusiv cea de ieșire.

Dacă am reprezenta grafic ca în fig. 2.8R curbele

$$\mathscr{P}_{tot.\,em.}=f\left(\int_V u\mathrm{d}v\right) \text{ și}$$

$$\mathscr{P}_{tot.\,disip.}=g\left(\int_V u\mathrm{d}v\right)$$

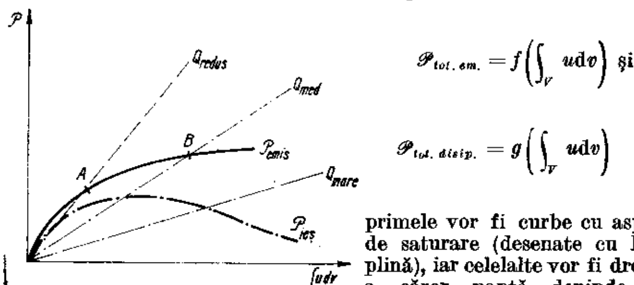


Fig. 2.8R

primele vor fi curbe cu aspect de saturare (desenate cu linie plină), iar celelalte vor fi drepte a căror pantă depinde de factorul de calitate (desenate punctat în fig. 2.8 R). Funcționarea staționară va apare pentru acei parametrii care fac

$$\mathscr{P}_{tot.\,emis.}=\mathscr{P}_{tot.\,disip.} \tag{2.8.5}$$

în punctele de funcționare *A*, *B* în fig. 2.8R.

Puterea de ieșire va fi dată de

$$\mathscr{P}_{ieș.}=\frac{\omega\int_V u\,dv}{Q_{ext}} \tag{2.8.6}$$

unde am notat Q_{ext} contribuția la factorul de calitate total Q al cavității provenită de la pierderile prin cuplajul cu exteriorul

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{Q_c}+\frac{1}{Q_{ext}}. \tag{2.8.7}$$

Pentru calcularea lui Q_{ext} considerăm că repartizarea energiei este uniformă în volumul cavității astfel încît putem scrie

$$\int_V u\mathrm{d}v = \int_S u\mathrm{d}s \int_0^l \mathrm{d}l = l \int_S u\mathrm{d}s \tag{2.8.8}$$

unde S este suprafața oglinzii. Energia incidentă pe oglindă în unitatea de timp va fi

$$\mathscr{E} = \frac{c}{n_r} \int_S u\mathrm{d}s \,. \tag{2.8.9}$$

Din aceasta, o parte $(1 - \mathscr{R})$, unde $\mathscr{R}$ este factorul de reflexie al oglinzii, iese în exterior, deci putem scrie

$$\mathscr{P}_{ies.} = \frac{c}{n_r}(1 - \mathscr{R}) \frac{\int_S u\mathrm{d}v}{l} \,. \tag{2.8.10}$$

Comparînd ecuația (2.8.10) cu ecuația (2.8.6) obținem

$$\frac{\omega}{\theta_{ext}} = \frac{c(1 - \mathscr{R})}{l \cdot n_r}$$

de unde

$$Q_{ext} = \frac{\omega l n_r}{c(1 - \mathscr{R})} \,. \tag{2.8.11}$$

Înmulțind în membrul drept al ecuației (2.8.6) cu $\mathscr{P}_{tot.\,disip.}$ atît la numărător cît și la numitor obținem

$$\mathscr{P}_{ies.} = \frac{\frac{1}{Q_{ext}}}{\frac{1}{Q}} \mathscr{P}_{tot.\,disip.} \tag{2.8.12}$$

Cînd Q_{ext} scade, și Q scade deci raportul din membrul drept al ecuației (2.8.12) crește. În același timp conform fig. 2.8R se vede că $\mathscr{P}_{tot.\,disip.}$ scade deoarece în punctele de funcționare egalează $\mathscr{P}_{tot.\,emis}$. Produsul acestor doi factori va reprezenta o curbă cu maxim (fig. 2.8R).

Pentru a găsi parametrii corespunzători puterii de ieşire maxime pentru o anumită putere de pompaj (o anumită $\mathcal{P}_{tot.\ emis}$), egalăm ecuaţia (2.8.3) şi (2.8.4)

$$\frac{\omega}{Q} = \frac{c\alpha_0}{n_r} \frac{1}{1 + \frac{\int_V u dv}{\xi}}. \tag{2.8.13}$$

Din ecuaţia (2.8.13) obţinem :

$$\int_V u dv = \frac{\left(Q \frac{c}{n_r} \alpha_0 - \omega\right) \xi}{\omega}. \tag{2.8.14}$$

Înmulţind în ecuaţia (2.8.14) ambii membrii cu $\frac{\omega}{Q_{ext}}$ obţinem

$$\mathcal{P}_{ies.} = \frac{\left(Q \frac{c}{n_r} \alpha_0 - \omega\right) \xi}{Q_{ext}}. \tag{2.8.15}$$

Această expresie trebuie maximizată în funcţie de valorile lui Q_{ext}

$$\frac{d\mathcal{P}_{ies.}}{dQ_{ext}} = 0. \tag{2.8.16}$$

Rezolvînd ecuaţia (2.8.16) obţinem

$$Q_{ext} = \frac{Q_c}{\sqrt{\frac{c\alpha_0}{\alpha n_r} Q_c - 1}}. \tag{2.8.17}$$

Cu valorile date în textul problemei pentru laserul cu solid

$$Q_{ext} = \frac{10^9}{\frac{3 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^{15} \cdot 1,8} - 1} = 1,1 \cdot 10^7$$

şi

$$\mathcal{R} = 1 - \frac{n_r l \omega}{c Q_{ext}} \approx 0,5 = 50\,\%.$$

În cazul laserului cu gaz, cu datele din enunț,

$$\mathcal{Q}_{ext} = 9 \cdot 10^7$$

$$\mathcal{R} \approx 97\,\%.$$

Remarcăm că în cazul gazului, lărgirea fiind neomogenă, acest rezultat nu este riguros corect.

2.9. 1°. Se dezvoltă cîmpul $\bar{E}$, cîmpul magnetic $\bar{H}$, magnetizarea $\bar{M}$ și curentul $\bar{I}$ după modurile proprii ale cavității, neglijîndu-se polarizarea gazului

$$\bar{E} = \sum_n e_n(t)\bar{E}_n(x, y, z)$$

$$\bar{H} = \sum_n h_n(t)\bar{H}_n(x, y, z)$$

$$\bar{M} = \sum_n m_n(t)\bar{H}_n(x, y, z)$$

$$\bar{I} = \varepsilon_0 \sum_n I_n(t)\bar{E}_n(x, y, z).$$

Deoarece în cavitate oscilează un singur mod, sumele conțin cîte un singur termen. Introducînd dezvoltările anterioare în ecuațiile lui Maxwell, în regim armonic se obține ecuația pentru componenta temporală $h(t)$

$$\ddot{h}(t) + \omega_c^2 h(t) + \ddot{m}(t) = \omega_c \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, i(t)\,; \tag{2.9.1}$$

ω_c este frecvența de oscilație a cavității. Ecuația nu ține cont de pierderi. Într-o cavitate reală, cu factorul de calitate Q_c, ecuația (2.9.1) devine

$$\ddot{h}(t) + \frac{\omega_c}{Q_c}\dot{h}(t) + \omega_c^2 h(t) + \ddot{m}(t) = \omega_c \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, i(t) \tag{2.9.2}$$

$$h(t) \propto \exp[i\omega t]$$

$$m(t) = \chi h(t) \propto \exp[i\omega t]\,;$$

χ este susceptibilitatea complexă a gazului.

Ecuaţia (2.9.2) devine

$$\left[-(1+\chi)\,\omega^2 + i\,\frac{\omega\omega_c}{Q_c} + \omega_c^2\right] h(t) = \omega_c \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, i(t)\,; \qquad (2.9.3)$$

$i(t)$ este curentul prin bucla de excitare. Dacă tensiunea la bornele de intrare în cavitate este $u(t)$, se poate scrie

$$u(t) = \beta\,\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = i\beta\omega h(t) \qquad (2.9.4)$$

deoarece $u(t)$ se datoreşte tensiunii electromotoare induse în buclă de cîmpul $h(t)$.

Notînd cu L inductanţa proprie a cavităţii şi cu M_c inductanţa de cuplaj între buclă şi cavitate, se obţine

$$L\left[i(1+\chi)\omega + \frac{\omega_c}{Q_c} + \frac{\omega_c^2}{i\omega}\right] u(t) = M_c^2\omega i(t) \qquad (2.9.5)$$

cu condiţia

$$\beta\omega_c \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{\omega^2 M_c^2}{L}. \qquad (2.9.6)$$

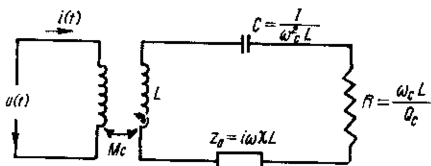


Fig. 2.9R *a*

Rezultă schema echivalentă din figura 2.9R, a. Z_0 este o impedanţă care exprimă prezenţa atomilor în cavitate (e proporţională cu susceptibilitatea magnetică). Dacă $\omega \approx \omega_c$, impedanţa circuitului buclă-cavitate este

$$Z = \frac{M_c^2/L^2}{Z_0/\omega_c^2 L^2 + \left(1 + 2iQ_c\,\dfrac{\omega - \omega_c}{\omega_c}\right)/\omega_c Q_c L}. \qquad (2.9.7)$$

Fie linia coaxială adaptată, avînd rezistența caracteristică R_s. Impedanța de intrare este (fig. 2.9R, b)

$$Z_{in} = \frac{R_s^2}{Z} = \frac{R_s^2}{\omega_c^2 M_c^2}\left[z_0 + \frac{\omega_c L}{Q_c}\left(1 + 2iQ_c \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c}\right)\right] \qquad (2.9.8)$$

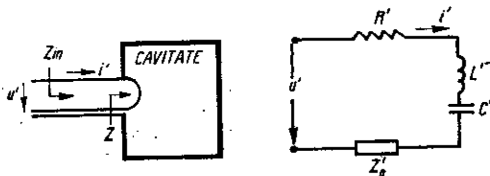


Fig. 2.9R b

unde

$$Z_0' = Z_0 \frac{R_s^2}{\omega_c^2 M_c^2}; \qquad R' = R \frac{R_s^2}{\omega_c^2 M_c^2} \qquad (2.9.9)$$

$$C' = C \frac{R_s^2}{\omega_c^2 M_c^2}; \qquad L' = l \frac{R_s^2}{\omega_c^2 M_c^2}.$$

2°. Amplificarea cavității, definită ca raportul amplitudinii undei de ieșire față de amplitudinea unei excitatoare, este

$$A = \frac{Z_{in} - R_s}{Z_{in} + R_s}. \qquad (2.9.10)$$

Condiția de oscilație este $|A| \to \infty$. Notînd cu Q_s factorul de calitate al cuplajului cu exteriorul

$$Q_s = \frac{LR_s}{\omega_c M_c^2} \qquad (2.9.11)$$

rezultă condiția de prag

$$\frac{1}{Q_c}\left(1 + 2iQ_c \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c}\right) + i\chi + \frac{1}{Q_s} = 0. \qquad (2.9.12)$$

3°. Elementele de matrice ale operatorului perturbației, corespunzătoare unui cîmp magnetic sinusoidal $B_1(t)$, paralel cu cîmpul magnetic static, sînt

$$P_{nn'} = -\mu_B(1 - \delta_{nn'})\, B_1(t); \qquad (2.9.13)$$

μ_B este magnetonul Bohr.

În problemă cîmpul static este cîmpul hiperfin, iar cel variabil, care induce tranziţii între subnivelele hiperfine este produs de oscilaţia cavităţii de rezonanţă. Ecuaţiile componentelor matricei densitate sînt

$$\dot{\rho}_{11} = W_{21}\,\rho_{22} - W_{12}\,\rho_{11} + \frac{1}{i\hbar}\,\mu_B(\rho_{12} - \rho_{21})\,B_1(t)$$

$$\rho_{22} = 1 - \rho_{11} \tag{2.9.14}$$

$$\dot{\rho}_{12} + i\Omega_0\rho_{12} = -\frac{1}{\tau_{12}}\,\rho_{12} + \frac{1}{i\hbar}\,\mu_B(\rho_{11} - \rho_{22})\,B_1(t)$$

unde

$$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{12};\ \ \hbar\Omega_0 = \hbar\Omega_{21} = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1.$$

W_{21} şi W_{12} sînt ratele tranziţiilor între nivelele $|2\rangle$ şi $|1\rangle$ respectiv $|1\rangle$ şi $|2\rangle$ (cu $|1\rangle$ am notat starea $|F=1,\ M=0\rangle$ iar cu $|2\rangle$ starea $|F=0,\ M=0\rangle$). Timpii de relaxare ai celor două nivele sînt

$$T_1 = \frac{1}{W_{12} + W_{21}},\quad T_2 = \tau_{12}.$$

Diferenţa $W_{12} - W_{21}$ se aproximează cu valoarea de echilibru

$$W_{12} - W_{21} \approx \frac{1}{T_1}\,\mathrm{th}\left[\frac{\hbar\Omega_0}{2kT}\right]. \tag{2.9.16}$$

Ecuaţiile obţinute (2.9.14) se complică prin acumularea atomilor în cavitate. Dacă la momentul $t = 0$ în cavitatea în care există un gaz A, începe să pătrundă gazul B, astfel că în orice moment concentraţiile celor două gaze să satisfacă egalitatea $N_A + N_B = N =$ $=$ constant, evoluţia concentraţiilor este exponenţială

$$N_A = N\exp\left[\frac{t}{\tau_a}\right]$$

$$N_B = N\left(1 - \exp\left[\frac{t}{\tau_a}\right]\right) \tag{2.9.17}$$

τ_a este constanta de timp de acumulare. Inițial, gazele au operatorii densitate $\hat{\rho}_A$ și $\hat{\rho}_B$. Operatorul densitate al amestecului este

$$\hat{\rho}(t) = \frac{N_A\hat{\rho}_A + N_B\hat{\rho}_B}{N} = \hat{\rho}_A \exp\left[-\frac{t}{\tau_a}\right] + \hat{\rho}_B\left(1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau_b}\right]\right).$$

Gazul B este format din atomii de hidrogen cu matricea densitate inițială

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci $\hat{\rho}(t)$ verifică ecuațiile

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= \frac{1}{\tau_a}(1 - \rho_{11}) \\ \dot{\rho}_{12} &= \frac{1}{\tau_a}\rho_{12} = \dot{\rho}^*_{21} \qquad (2.9.18) \\ \dot{\rho}_{22} &= -\frac{1}{\tau_a}\rho_{22}. \end{aligned}$$

Ecuațiile complete se obțin adăugînd în (2.9.14) termeni de forma (2.9.18)

$$\dot{\rho}_{11} - \dot{\rho}_{22} = -i\frac{2\mu_B}{\hbar}(\rho_{12} - \rho_{21})B_1(t) - \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{T_1}\operatorname{th}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right) \qquad (2.9.19)$$

$$\dot{\rho}_{12} = -i\frac{\mu_B}{\hbar}(\rho_{11} - \rho_{22})B_1(t) - \frac{\rho_{12}}{\tau_2} - i\Omega_0\rho_{12} = \dot{\rho}^*_{21}$$

unde

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{\tau_a} \quad \text{și} \quad \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{\tau_a}. \qquad (2.9.20)$$

Ecuațiile (2.9.19) sînt de tip Bloch și se rezolvă introducînd doi vectori $\overline{M}$ și $\overline{B}$, prin componentele lor

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu_B(\rho_{12} + \rho_{21}), & B_1 &= B_1(t) \\ M_2 &= i\mu_B(\rho_{12} - \rho_{21}), & B_2 &= 0 \\ M_3 &= \mu_B(\rho_{11} - \rho_{22}), & B_3 &= -\frac{\hbar}{2\mu_B}\Omega_0 \end{aligned}$$

şi

$$\frac{d\overline{M}}{dt} = \gamma\overline{M} \times \dot{\overline{B}} - \frac{M_1\overline{I}_1 + M_2\overline{I}_2}{\tau_2} - \frac{(M_3 - M_0)\,\overline{I}_3}{\tau_1}$$

unde
$$\gamma = \frac{2\mu_B}{h}\ ;\ M_0 = \mu_B\,\tau_1\left[\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{T_1}\,\mathrm{th}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right)\right].$$

Dacă $|B_3| \ll |B_1|$ se obţine soluţia

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1' \cos\ \omega t - M_2' \sin\ \omega t \\ M_2 &= M_1' \sin\ \omega t - M_2' \cos\ \omega t \\ M_3 &= M_3' \end{aligned} \tag{2.9.21}$$

unde

$$M_1' = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma M_0(\omega-\omega_0)\,\tau_2^2}{1+(\omega-\omega_0)^2\,\tau_2^2+\left(\frac{\gamma|B_1|}{2}\right)^2\tau_1\tau_2}\,|B_1|$$

$$M_2' = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma M_0\tau_1}{1+(\omega-\omega_0)^2\,\tau_2^2+\left(\frac{\gamma|B_1|}{2}\right)^2\tau_1\tau_2}\,|B_1| \tag{2.9.22}$$

$$M_3' = \frac{1}{2}\,\frac{M_0[1+(\omega-\omega_0)\ \tau_2]}{1+(\omega-\omega_0)^2\,\tau_2^2+\left(\frac{\gamma|B_1|}{2}\right)^2\tau_1\tau_2}\,|B_1|.$$

Macroscopic, magnetizarea se scrie

$$\overline{M} = \chi\overline{H}$$

iar partea reală este

$$M_1 = |\overline{H}|\,(\chi' \cos\ \omega t + \chi'' \sin\ \omega t).$$

Cuantic, se obţine din definiţia magnetizării

$$M' = N\mu_B(\rho_{12} + \rho_{21}).$$

Rezultă expresiile părţilor reale şi imaginare ale susceptibilităţii magnetice

$$\chi' = \mu_0 \frac{N \frac{\mu_B^2}{\hbar} \tau_1 \tau_2^2 \left[\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{T_1} \operatorname{th}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right) \right] (\omega - \omega_0)}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_2^2 + \left(\frac{\mu_B |B_1|}{\hbar} \right)^2 \tau_1 \tau_2} \tag{2.9.23}$$

$$\chi'' = -\mu_0 \frac{N \frac{\mu_B^2}{\hbar} \tau_1 \tau_2 \left[\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{T_1} \operatorname{th}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right) \right]}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_2^2 + \left(\frac{(\mu_B |B_1|}{\hbar} \right)^2 \tau_1 \tau_2}. \tag{2.9.24}$$

Regimul static este catacterizat de termenii care se obţin punînd $\tau_a \to \infty$. Celălalt termen (preponderent la temperaturi $T \geqslant 300°K$) reprezintă scurgerea permanentă a gazului.

4°. În regim permanent, în cavitate pătrunde un flux de atomi în starea $|1\rangle$, notat cu Φ

$$\Phi = \frac{NV}{\tau_a}. \tag{2.9.25}$$

Pentru simplificare, se consideră volumul balonului V egal cu cel al cavităţii. În ecuaţia care determină pragul, anulîndu-se partea imaginară în jurul frecvenţei $\omega \approx \omega_c \approx \Omega_0$ se obţine

$$\frac{1}{Q} + \chi'' = 0 \quad \text{cu} \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_s} \tag{2.9.26}$$

Legătura între puterea cedată de atomi $\mathscr{P}$ şi energia înmagazinată în cavitate $\mathscr{E}_c$ este

$$\mathscr{P} = \frac{\omega_0}{Q} \mathscr{E}_c; \tag{2.9.27}$$

$$\mathscr{E} \approx \frac{1}{2} V \frac{|B_1|^2}{\mu_0} \tag{2.9.28}$$

$|B_1|^2$ rezultă din (2.9.24) şi (2.9.26). Se obţine o relaţie algebrică între puterea maserului şi fluxul de atomi de hidrogen

$$\frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_0} = -2q^2\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + (1 - cq)\frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \qquad (2.9.29)$$

în care

$$\mathscr{P}_0 = \frac{\hbar^2 V\Omega_0}{2\mu_0 Q\mu_B^2}\left(\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_1^d}\right)\left(\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_2^d}\right); \quad \Phi_0 = \frac{2\mathscr{P}_0}{\hbar\omega_0}$$

$$q = \frac{|\bar{v}|\sigma_1}{\sqrt{2}\,\mu_0}\frac{\hbar}{\mu_B^2}\frac{1}{Q}\tau_a\sqrt{\left(\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_1^d}\right)\left(\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_2^d}\right)}\frac{\Phi_{tot}}{\Phi}$$

$$c = \sqrt{\frac{\dfrac{1}{\tau_a} + \dfrac{1}{\tau_1^d}}{\dfrac{1}{\tau_a} + \dfrac{1}{\tau_2^d}}} + 2\sqrt{\frac{\dfrac{1}{\tau_a} + \dfrac{1}{\tau_2^d}}{\dfrac{1}{\tau_a} + \dfrac{1}{\tau_1^d}}}$$

τ_1^d şi τ_2^d sînt timpii de relaxare ai nivelelor, corespunzători diferitelor mecanisme (ciocniri cu pereţii), exclusiv relaxarea spin-spin; $\bar{v}$ este viteza termică a atomilor în cavitate, σ_1 — secţiunea eficace medie a interacţiunii de spin, Φ_{tot} — fluxul total de atomi care intră în cavitate (în stările $|1\rangle$ şi $|2\rangle$).

Dacă $\tau_1^d = \tau_2^d$, $c = 3$ şi se obţine

$$\frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_0} = -2q^2\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 + (1 - 3q)\frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \qquad (2.9.30)$$

Discuţie: Realitatea fizică impune $\frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_0} > 0$ şi $\frac{\Phi}{\Phi_0} > 0$, de unde

$$q < 2 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}172.$$

Maserul oscilează dacă fluxul de atomi normat $\frac{\Phi}{\Phi_0}$ este cuprins între rădăcinile trinomului (2.9.30). Puterea optimă se obţine pentru

$$\Phi_{opt} = \Phi_0\frac{1 - 3q}{4q^2}$$

$q = 0$. Puterea depinde liniar de flux (funcţionarea ideală a maserului).

$0 < q < 0{,}172$. Puterea depinde pătratic de fluxul de atomi. Saturarea apare cu atît mai repede, cu cît q este mai mare.

$q \geqslant 0{,}172$. Maserul nu oscilează, oricît de mare ar fi fluxul de atomi de hidrogen care intră în cavitate.

2.10. 1°.a) Lărgimea de bandă transmisă în acest caz este cea a unui etalon Fabry-Perot pasiv, dată de relaţia

$$\Delta\omega_{c\ pasiv} = \frac{(1-r)\,c}{2\pi n_r L\sqrt{r}} = \frac{(1-0{,}45)\cdot 3\cdot 10^8}{2\pi\cdot 10^{-1}\sqrt{0{,}45}} \approx 400\ \text{MHz}. \quad (2.10.1)$$

1°.b) Cînd în interiorul rezonatorului se află un mediu amplificator lărgimea de bandă maximă transmisă este dată de expresia

$$\Delta\omega_{c\ activ} = \frac{(1 - r\exp[-\alpha_0 L])c}{2\pi n_r L(r\exp[-\alpha_0 L])^{1/2}}. \quad (2.10.2)$$

Relaţia (2.10.2) se obţine din relaţia (2.10.1) dacă se înlocuieşte r cu $r\exp[-\alpha_0 L)]$.

Numeric din (2.10.2) obţinem

$$\Delta\omega_{c\ activ} = \frac{(1-0{,}45\cdot 2)\cdot 3\cdot 10^8}{2\pi\cdot 10^{-1}\sqrt{2\cdot 0{,}45}} \approx 50\ \text{MHz}. \quad (2.10.3)$$

Amplificatorul cu undă călătoare este un amplificator de bandă largă. În cazul amplificării luminii lărgimea de bandă amplificată se limitează la lărgimea de fluorescenţă a liniei amplificate. În cazul rubinului la temperatura camerei lărgimea liniei de fluorescenţă este de ordinul a 20 Å sau de ordinul a 100 GHz.

3°. Mărimea amplificării pentru amplificatorul cu cavitate rezonantă este dată de expresia

$$G = \frac{(1-r)^2 G_0}{1 + r^2 G_0^2 - 2rG_0\cos\varphi} \quad (2.10.4)$$

unde φ este deplasarea de fază relativă a undelor care au o diferenţă de drum în interiorul rezonatorului egală cu $2n_r L$.

Expresia maximă a cîştigului se obţine din (2.10.4) punînd condiţia ca $\cos^2\varphi = 1$ şi deci

$$G_{max} = \frac{(1-r)^2 G_0}{(1-rG_0)^2}. \quad (2.10.5)$$

Din (2.10.5) se obține

$$G_{max(1)} = \frac{(1-r)^2 G_{0(1)}}{(1-r\,G_{0(1)})^2} = \frac{(1-0,45)^2 \cdot 2}{(1-0,45 \cdot 2)^2} \approx 60 \qquad (2.10.6)$$

și

$$G_{max(2)} = \frac{(1-r)^2\, G_{0(2)}}{[1-rG_{0(2)}]^2} = \frac{(1-0,45)^2 \cdot 2,1}{(1-0,45 \cdot 2,1)^2} \approx 210 \qquad (2.10.7)$$

deci

$$\Delta G_{max} = 150.$$

4°. Amplificatorul cu undă călătoare este stabil dacă la granița dintre rubin și aer există un coeficient de reflexie care satisface condiția

$$G_0 r < 1 \quad \text{sau} \quad r \leqslant \frac{1}{G_0} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

5°. Dacă se neglijează pierderile în interiorul amplificatorului condiția de autoexcitare a amplificatorului este

$$G_0 \geqslant r^{-1} \quad \text{sau} \quad G_0 \geqslant \frac{1}{0,45} = 2,22.$$

2.11. 1°. Conform teoriei de împrăștiere a lui Mie o incluziune sferică primește o putere egală cu $Q_{ext}\pi r_0^2 I$ de la fasciculul laser incident, indiferent de polarizarea fasciculului. Din aceasta, sfera absoarbe $Q_{abs.}\,\pi r_0^2 I$ și împrăștie în toate direcțiile $Q_{împr.}\,\pi r_0^2 I$.

Legea conservării energiei dă relația

$$Q_{ext} = Q_{abs.} + Q_{împr.}$$

Numeric, factorul de absorbție $\mathscr{A} = Q_{abs.}$ e dat conform aceleiași teorii a împrăștierii a lui Mie de relația

$$Q_{abs.} \approx Q_{ext} \simeq 2,68\,\frac{2\pi r_0}{\lambda(\text{mediu})}, \text{ pentru că } Q_{împr.} \ll Q_{abs.}$$

$$\text{Deci } \mathscr{A} \approx 2,68\,\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,7 \cdot 10^{-8} \cdot 1,52}{1,06 \cdot 10^{-6}} = 1,61.$$

2°. Prezența radiației laser în mediul activ produce o modificare a indicelui de refracție datorită încălzirii puternice. În cazul în care $\frac{\mathrm{d}n_r}{\mathrm{d}T} > 0$, regiunea încălzită a materialului gazdă din jurul incluziunii poate focaliza același puls laser, sau pulsul laser următor, care apare după un timp suficient de scurt și înainte ca regiunea să se fi răcit. Putem evalua distanța focală a lentilei formate în modul următor.

Distanța focală f a unei lentile sferice avînd raza r și un indice de refracție n_{r1}, este

$$f = \frac{n_{r1}}{n_{r0}} \frac{r}{4\left(\frac{n_{r1}}{n_{r0}} - 1\right)^2}$$

unde n_{r0} este indicele de refracție al mediului în care e pusă lentila sferică. O măsură a efectului de lentilă sferică este extinderea spațială a variației indicelui de refracție de la valoarea dinaintea apariției pulsului laser, n_r. Adică, importanța efectului de lentilă e măsurată de mărimea

$$\langle \delta n_r \rangle = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho} \int_{r0}^{\rho} r \; [n_r(r, t) - n_r] \, \mathrm{d}r.$$

Cantitatea $[n_r(r, t) - n_r]$ depinde de temperatura $T(r, t)$ în modul următor

$$[n_r(r, t) - n_r] \approx \frac{dn_r}{\mathrm{d}T} T(r, t).$$

Deoarece $\langle \delta n_r \rangle \ll n_r$, un estimat al distanței focale f e dat de

$$f \approx \frac{n_r^2 \langle r \rangle}{2\langle \delta n_r \rangle^2},$$

unde $$\langle r \rangle = \lim_{\rho\to\infty} \int_{r0}^{\rho} r[n_r(r, t) - n_r] \, \mathrm{d}r.$$

În cazul valorilor numerice date

$$[n_r(r, t) - n_r] \approx \frac{dn_r}{dT} T(r, t) = 18 \cdot 10^{-2}$$

$$\langle r \rangle = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

$$\langle \delta n_r \rangle = 4 \cdot 10^{-3} \text{ și}$$

$$f \approx \frac{(1{,}52)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 16 \cdot 10^{-6}} = 14 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}.$$

2.12. Utilizînd funcția delta a lui Dirac, densitatea de radiație la o frecvență ω, va fi

$$u(\omega) = u(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) \tag{2.12.1}$$

unde, prin definiție

$$\delta(\omega - \omega_0) = 0, \text{ pentru } \omega \neq \omega_0 \tag{2.12.2}$$

și pentru o funcție arbitrară $f(\omega)$,

$$\int_{-\omega}^{+\omega} f(\omega)\, \delta(\omega - \omega_0)\, d\omega = f(\omega_0). \tag{2.12.3}$$

Neglijînd emisia spontană, rata netă a emisiei de energie indusă într-un interval dω centrat în jurul lui ω este dată de

$$\hbar\omega \cdot G(\omega)\, u(\omega)\, [B_{mn}N_m - B_{nm} N_n]\, d\omega \tag{2.12.4}$$

sau dacă ținem seama de relațiile

$$g_n N_m = g_m N_n \exp\left[\frac{\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n}{kT}\right] \tag{2.12.5}$$

și

$$g_n B_{nm} = g_n B_{mn} \tag{2.12.6}$$

expresia (2.12.4) devine

$$\hbar\omega \cdot B_{mn} G(\omega)\, u(\omega) \left[N_m - N_n \frac{g_m}{g_n}\right] d\omega. \tag{2.12.7}$$

Funcţia $G(\omega)$ este dată de expresia

$$G(\omega) = \Delta\omega_L \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta\omega_L\right)^2}. \qquad (2.12.8)$$

Introducînd relaţia (2.12.1) în (2.12.7) şi integrînd, rata emisiei de energie indusă va fi

$$\frac{du(\omega_0)}{dt} = \hbar\omega_0 B_{mn} G(\omega_0)\, u(\omega_0) \left[N_m - N_n \frac{g_m}{g_n}\right]. \qquad (2.12.9)$$

Considerînd că pierderile care au loc în sistem se datorează absorbţiei de fotoni de către impurităţi sau scăpări de fotoni din sistem, fotonii în cavitate vor avea un timp de viaţă finit

$$\tau_f = \frac{Q}{\omega_0}. \qquad (2.12.10)$$

Aceasta se manifestă prin introducerea unui termen adiţional în relaţia (2.12.9)

$$\frac{du(\omega_0)}{dt} = \hbar\omega_0 B_{mn} G(\omega_0) \left[N_m - N_n \frac{g_m}{g_n}\right] u(\omega_0) - \frac{u(\omega_0)}{\tau_f}. \qquad (2.12.11)$$

Integrînd ecuaţia (2.12.11), cu condiţia ca pentru $t = 0$ să avem $u(\omega_0) = U_0$, se obţine

$$u(\omega_0) = U_0 \exp\left[\hbar\,\omega_0 B_{mn}\left(N_m - N_n \frac{g_m}{g_n}\right) G(\omega_0) - \frac{1}{\tau_f}\right]. \qquad (2.12.12)$$

Din (2.12.12), rezultă că se obţine amplificare, dacă

$$N_m - N_n \frac{g_m}{g_n} \geqslant \frac{\Delta\omega_L}{4\tau_p \hbar\omega_0 B_{mn}}, \qquad (2.12.13)$$

unde s-a considerat

$$G(\omega_0) = \frac{4}{\Delta\omega_L}. \qquad (2.12.14)$$

Punînd

$$B_{mn} = \frac{\pi c^3 A_{mn}}{2\hbar\omega_0^3} = \frac{\pi c^3}{2\hbar\omega_0^3}\frac{1}{\tau_m} \qquad (2.12.15)$$

rezultă

$$\left(N_m - N_n \frac{g_m}{g_n} \right) \geqslant \frac{\tau_m}{\tau_{nm}} \frac{\Delta\omega_L}{2\pi} \frac{\omega_0^2}{c^2}. \qquad (2.12.16)$$

2.13. În figura 2.13R, a, sînt indicate mărimile principale care vor interveni în calcule. Bastonul de rubin și teaca de Al_2O_3 au același indice de refracție, deci nu există refracție la suprafața lor de separație. Se neglijează absorbția radiației de pompaj în teacă. Puterea totală absorbită de baston pe unitatea de arie este

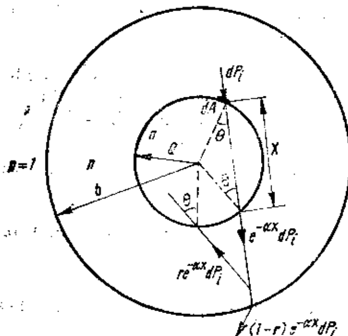


Fig. 2.13R, a

$$\mathrm{d}\mathscr{P}_a = \frac{1 - \exp[-\alpha x]}{1 - r\exp[-\alpha x]}\,\mathrm{d}\mathscr{P}_i; \qquad (2.13.1)$$

$\mathrm{d}\mathscr{P}_i$ este puterea incidentă pe unitatea de arie a rubinului, care vine din unitatea de unghi solid. Nedepinzînd de absorbția sau de temperatura rubinului, ea se poate calcula în cazul particular $\alpha \to \infty$. Puterea specifică de emisie în vid a flashului este

$$E(T) = \sigma_B T^4 = \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}_e}{\mathrm{d}A}$$

iar în corpurile cu indice de refracție n

$$E(T) = n^2 \sigma_B T^4$$

(σ_B este constanta din legea Stefan-Boltzmann).

Dacă în cavitate se stabilește echilibrul termodinamic puterea incidentă este

$$\mathrm{d}\mathscr{P}_i = \frac{n^2}{\pi}\sigma_B T^4 \cos\theta\,(1 - r)\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\Omega \qquad (2.13.2)$$

deoarece între puterea cedată de aria dA în unghiul solid dΩ (strălucirea suprafeței) și puterea specifică de emisie, există relația

$$\rho(T) = \frac{E(T)}{\pi}.$$

Puterea specifică de absorbție este

$$\mathrm{d}\mathscr{A}_s(T) = \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}_a/\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\mathscr{P}_e/\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}_a}{\mathrm{d}A}\frac{1}{\sigma_B T^4}$$

$$\mathrm{d}\mathscr{A}_s(T) = \frac{n^2}{\pi}\frac{1-r}{1-r\exp[-\alpha x]}(1-\exp[-\alpha x])\cos\theta \mathrm{d}\Omega$$

$$\mathscr{A}_s(T) = \frac{n^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-r}{1-\exp[-\alpha x]}(1-\exp[-\alpha x])\cos\alpha\cos^2\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\beta$$

cu unghiul α și β indicate în figura 2.13R, b).

Dacă absorbția în rubin este mică, $\alpha x \ll 1$ și se obține valoarea maximă a puterii specifice de absorbție

$$\mathscr{A}_{s\,max} = 2n^2\alpha a. \tag{2.13.3}$$

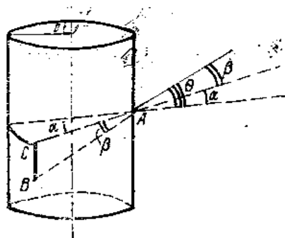


Fig. 2.13R, b

În general, limitele de integrare depind de coeficientul de reflexie r, α și β luînd valori numai pentru $r < 1$. Relația (2.13.3) este valabilă pentru iluminarea rubinului din toate direcțiile.

Cavitatea eliptică. Lampa de excitație, de rază R_s este așezată într-un focar, iar bastonul de rubin, de rază a, în celălalt focar. Suprafața efectivă de emisie, este un cilindru de rază R_s/n, coaxial cu rubinul, obținută ca înfășuratoarea razelor pornite din sursă și reflectate de pereții cavității. Limitele unghiului α rezultă imediat

$$\sin \alpha_0 = \min \left\{1, \frac{R_s}{n_a}\right\}. \tag{2.13.4}$$

Folosind relațiile din figura 2.13R, c, se obține valoarea limită a unghiului β.

Pentru ca $r < 1$, trebuie ca $\sin \Gamma < \frac{1}{n}$ (Γ este unghiul de incidență al vectorului $d\mathscr{P}_i$ în punctul H al tecii) și rezultă

$$\sin \beta_0 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{na}{b}\right)^2 \sin^2 \alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sin^2 \alpha}}. \tag{2.13.5}$$

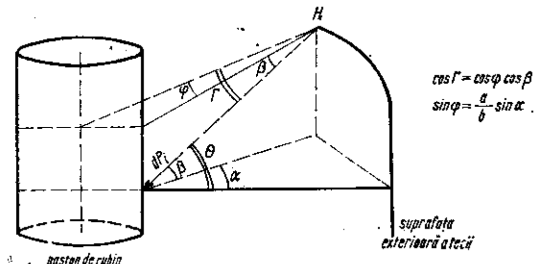


Fig. 2.13R, c

Discuție : a) Rubinul nu este înconjurat de teacă, iar $R_s = a$.

$$\mathscr{A}_{s1}(T) = 2\alpha a$$

$$\mathscr{A}_1(T) = \mathscr{A}_{s1}(T) = 2\alpha a$$

b) Rubinul este înconjurat de teacă, iar $R_s = b = na$

$$\mathscr{A}_{s2}(T) = 0{,}88 \cdot n \cdot 2\alpha a$$

$$\mathscr{A}_2(T) = 0{,}88 \cdot 2\alpha a$$

$$\frac{\mathscr{A}_{s2}(T)}{\mathscr{A}_{s1}(T)} = 1{,}54.$$

Deci puterea specifică de absorbţie a rubinului creşte dacă există o teacă de Al_2O_3, ceea ce înseamnă o scădere a pragului. Scăderea pragului este de 36%, dacă se alege $b = na$.

Eficienţa maximă a pompajului se va obţine pentru $b \to \infty$

$$\mathscr{A}_{s\,max}(T) = n\mathscr{A}_{s1} = 1{,}76\ \mathscr{A}_{s1}.$$

Dar în acelaşi timp

$$\mathscr{A}_{max}(T) = \mathscr{A}_1(T)$$

deci puterea totală de absorbţie rămîne aceeaşi.

2.14. Ecuaţiile staţionare pentru populaţiile celor trei nivele, se scriu (neglijînd degenerarea)

$$-\frac{N_2}{\tau_2} + N_3 S_{32} = 0 \qquad (2.14.1)$$

$$W_{13}(N_1 - N_3) - N_3(A_{31} + S_{32}) = 0 \qquad (2.14.2)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = N. \qquad (2.14.3)$$

Deoarece $S_{32} \gg A_{31}$ se poate neglija emisia spontană de pe nivelul $|3\rangle$ pe nivelul $|1\rangle$, obţinînd pentru populaţiile staţionare ale celor trei nivele

$$N_1 = \frac{W_{13} + S_{32}}{S_{32} + 2W_{13} + S_{32}W_{13}\tau_2} N \qquad (2.14.4)$$

$$N_2 = \frac{S_{32}W_{13}\tau_2}{S_{32} + 2W_{13} + S_{32}W_{13}\tau_2} N \qquad (2.14.5)$$

$$N_3 = \frac{W_{13}}{S_{32} + 2W_{13} + S_{32}W_{13}\tau_2} N. \qquad (2.14.6)$$

Din definiţia randamentului cuantic, rezultă expresia acestuia

$$\eta_q = \frac{N_2}{W_{13}(N_1 - N_3)} \frac{1}{\tau_{sp2}} = \frac{N_2 A_{21}}{W_{13}((N_1 - N_3)}. \qquad (2.14.7)$$

Cu τ_{sp2} am notat timpul de viaţă corespunzător emisiei spontane de pe nivelul $|2\rangle$. Se observă că $\tau_2 > \tau_{sp2}$, din cauza emisiei induse.

Introducînd în (2.14.7) expresiile lui N_1, N_2 şi N_3, se obţine imediat

$$\eta_q = \frac{\tau_2}{\tau_{sp2}} = \tau_2 A_{21}, \ \eta_q = 0{,}696. \qquad (2.14.8)$$

2.15. Din cauza constantei de timp mici a tranziţiei $|3 > \rightarrow |2>$, se poate considera că nivelul $|3>$, în regim staţionar, este gol, toţi atomii fiind pompaţi pe nivelul $|2>$. Echilibrul populaţiei nivelului $|2>$ se scrie

$$W_p \cdot \frac{N_1}{g_1} - \frac{N_2}{g_2\tau_2} = 0 \qquad (2.15.1)$$

unde W_p este probabilitatea de pompare a nivelului $|2\rangle$ (prin intermediul nivelului $|3\rangle$), iar N_1 şi N_2 sînt populaţiile medii ale nivelelor $|1\rangle$, respectiv $|2\rangle$. Condiţia de inversie

$$\frac{N_1}{g_1} < \frac{N_2}{g_2} \ \text{sau} \ N_1 < 2N_2 \qquad (2.15.2)$$

duce la

$$W_p > \frac{1}{2\tau_2} \qquad (2.15.3)$$

Puterea de pompaj pentru unitatea de volum a mediului activ se scrie

$$\mathscr{P}_p = W_p \cdot N_1 \hbar\omega_p \qquad (2.15.4)$$

unde $$\omega_p = \frac{2\pi c}{\lambda_p}.$$

Pentru atingerea pragului este necesar ca

$$\mathscr{P}_{p\ prag} = \frac{N_a \hbar\omega_p}{3\tau_2} \qquad (2.15.5)$$

căci $N_1 + 2N_2 = N_a$.

Cu datele numerice rezultă pentru unitatea de volum

$$\mathscr{P}_p \geqslant 3 \cdot 10^9 \text{ W/m}^3 \text{ la } 300°\text{K}$$

$$\mathscr{P}_p \geqslant 2 \cdot 10^9 \text{ W/m}^3 \text{ la } 70° \text{ K}$$

Puterea disipată prin efecte termice este aproape egală cu puterea de pompaj, randamentul fiind $1^0/_{00}$. Ecuaţia de disipare a căldurii este

$$\mathscr{P}_d = \frac{1}{R_{th}} (T - T_0) ; \qquad (2.15.6)$$

T este temperatura mediului activ, iar T_0 a mediului ambiant. Rezultă

$$T \approx 3300°\text{K} \text{ la } T_0 = 300°\text{K}$$

$$T \approx 2070°\text{K} \text{ la } T_0 = 70°\text{K}.$$

La temperatura mediului ambiant de 300°K, laserul cu rubin nu poate funcţiona în regim continuu, din cauza distrugerii mediului activ. Regimul continuu se obţine printr-o răcire convenabilă. Cîteodată se foloseşte, pentru scăderea pragului de pompaj, o „trompetă" de oxid de aluminiu, care înconjoară bastonul de rubin (efectul este descris în problema 2.13).

2.16. 1°. Coeficientul de absorbţie se obţine cu ajutorul relaţiei care dă bilanţul detaliat în cazul neglijării emisiei spontane

$$-\frac{\mathrm{d}I_\omega}{\mathrm{d}z} = \hbar\omega(B_{nm}N_n - B_{mn}N_m)\frac{I_\omega}{v} \qquad (2.16.1)$$

unde I_ω este intensitatea radiaţiei incidente la frecvenţa ω, iar v viteza de propagare a acesteia în mediul considerat. Coeficientul de absorbţie va fi dat de

$$\Gamma_\omega = -\frac{1}{I_\omega}\frac{\mathrm{d}I_\omega}{\mathrm{d}z} = \frac{\hbar\omega n_r}{c} = (B_{nm}N_n - B_{mn}N_m). \qquad (2.16.2)$$

Ţinînd seama de relaţia dintre coeficienţii lui Einstein pentru tranziţii induse

$$B_{nm}g_n = B_{mn}g_m \qquad (2.16.3)$$

$$\Gamma_\omega = \frac{\hbar\omega n_r}{c}\ B_{mn}\left(N_n\frac{g_m}{g_n} - N_m\right). \qquad (2.16.4)$$

Relaţia dintre probabilitatea de tranziţie indusă pe unitatea de timp şi coeficientul Einstein este

$$B_{mn}u_{\omega} = W_{nm}g_{n} \tag{2.16.5}$$

iar

$$W_{nm} = \frac{\pi}{n_r^2 \hbar^2 \varepsilon_0} \frac{|\bar{\mu}^e_{nm}|^2}{3} g(\omega,\ \omega_{mn})u_{\omega}. \tag{2.16.6}$$

Înlocuind (2.16.5) şi (2.16.6) în (2.16.4) obţinem

$$\Gamma_{\omega} = \frac{\pi\omega\,|\bar{\mu}^e_{nm}|^2}{3cn_r\hbar\varepsilon_0}\ g(\omega,\ \ \omega_{mn})\left(N_n\frac{g_m}{g_n} - N_m\right)g_n. \tag{2.16.7}$$

În cazul problemei se presupune că nivelul inferior coincide cu cel fundamental deci, în cazul cînd intensitatea incidentă nu este prea mare, $N_m \ll N_n$ işi $N_n \approx N_0$.

Cu aceste observaţii

$$\Gamma_{\omega} = \frac{\pi\omega\,|\bar{\mu}^e_{nm}|^2}{3cn_r\hbar\varepsilon_0} g(\omega,\ \ \omega_{mn})\,g_m N_0. \tag{2.16.8}$$

Observăm că există o proporţionalitate între coeficientul de absorbţie şi numărul de atomi din unitatea de volum. Coeficientul de proporţionalitate poartă numele de secţiune eficace de absorbţie.

Integrînd peste tot profilul liniei se obţine coeficientul de absorbţie integral

$$2\Gamma\cdot\Delta\omega = \int \Gamma_{\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{\pi\omega_{mn}\,|\bar{\mu}^e_{mn}|^2}{3cn_r\hbar\varepsilon_0} N_0 g_m. \tag{2.16.9}$$

Coeficientul care înmulţeşte pe N_0 în expresia lui Γ reprezintă coeficientul de absorbţie integral per atom, adică secţiunea eficace:

$$\sigma_a = \frac{\pi\omega_{mn}\,|\bar{\mu}^e_{mn}|^2}{2\Delta\omega\cdot 3cn_r\hbar\varepsilon_0} g_m. \tag{2.16.10}$$

Cu datele problemei

$$\sigma_a = \frac{\pi\cdot 3\cdot 10^{15}\cdot 16\cdot 10^{-62}\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 10^{10}\cdot 3\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot 1{,}8\cdot \frac{6{,}6}{2\pi}\,\frac{10^{-34}}{4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}}} = 3{,}2\cdot 10^{-20}\ \mathrm{m}^2.$$

2°. Puterea absorbită de unitatea de volum

$$P = \sigma_a N_0 I_0 = 3{,}2 \cdot 10^9 \text{ W/m}^3.$$

2.17. 1°. Intensitatea luminii scade de e ori față de valoarea sa maximă la o distanță $2l$ dată de relația

$$2l = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \frac{1}{2d} \frac{1}{\mathrm{Re}\left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \tag{2.17.1}$$

unde $2l$ și $2d$ sînt cele arătate în figura 2.17.

Variația $\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}$ a constantei dielectrice e formată dintr-o sumă de doi termeni, unul datorat efectului de plasmă produsă de purtătorii de sarcină, care e predominant în cazul regimului de emisie spontană și celălalt datorat efectului de rezonanță, care e predominant în apropierea pragului emisiei stimulate, adică

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{plasmă} + \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{rezonanță} \tag{2.17.2}$$

a) În cazul regimului de emisie spontană

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{plasmă} \gg \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{rezonanță} \text{ și } \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \approx \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{plasmă}. \tag{2.17.3}$$

Din definiția constantei dielectrice știm că

$$\varepsilon_r = \frac{D(\omega)}{\varepsilon_0 E(\omega)} = \frac{\varepsilon_0 E(\omega) + P(\omega)}{\varepsilon_0 E(\omega)} = 1 + \frac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E(\omega)} \tag{2.17.4}$$

unde $P(\omega)$ este polarizația electrică definită ca momentul dipolar al unității de volum, adică $P(\omega) = N \langle p \rangle$, unde N este densitatea de electroni și $p = -ex$ este momentul dipolar al electronului.

Din ecuația de mișcare a unui electron, cu masa efectivă m^*, în cîmp electric armonic, în absența ciocnirilor

$$m^* \frac{d^2x}{dt^2} = -eE, \text{ rezultă că}$$

$$x = \frac{eE}{m^* \omega^2} \tag{2.17.5}$$

și

$$p = -ex = -\frac{e^2E}{m^*\omega^2}. \qquad (2.17.6)$$

Urmează că

$$P = -N\langle ex \rangle = -\frac{Ne^2}{m^*\omega^2}E \qquad (2.17.7)$$

și

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m^* \omega^2}. \qquad (2.17.8)$$

De aici

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m^* \omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (2.17.9)$$

unde $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m^*}$ este frecvența plasmei.

În cazul laserului cu GaAs

$$\omega_p^2 = \frac{7{,}2 \cdot 10^{22} \cdot 2{,}56 \cdot 10^{-38}}{8{,}58 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}648 \cdot 10^{-31}} = 3{,}3 \cdot 10^{27}\ \mathrm{s}^{-2}.$$

Înlocuind (2.17.9) în (2.17.1)

$$(2l)_{plasmă} = \frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{1}{2d}\frac{\omega^2}{\omega_p^2} = \frac{2c^2}{\omega_p^2 \cdot d} \qquad (2.17.10)$$

și numeric

$$(2l)_{plasmă} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}}{3{,}3 \cdot 10^{27} \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-6}} = 30 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}.$$

b) La rezonanță

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{plasmă} \ll \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{rezonanță}$$

și

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \approx \left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{rezonanță}. \qquad (2.17.11)$$

În acest caz

$$\varepsilon_r = 1 + j\frac{\sigma_e(\omega)}{\omega} \qquad (2.17.12)$$

unde $\sigma_e(\omega)$ este conductivitatea electrică complexă care dă naştere la tranziţii de rezonanţă şi

$$\left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)_{rezonanţă} = j\frac{\sigma_e(\omega)}{\omega\varepsilon_0} \qquad (2.17.13)$$

$$(2l)_{rezonanţă} = \frac{\lambda^2}{2\pi^2}\frac{1}{2d}\frac{1}{I_m\left(j\dfrac{\sigma_e(\omega)}{\omega^2}\right)} = \frac{\lambda}{\pi}\frac{c\varepsilon_0}{2d\cdot\sigma_e(\omega)}. \qquad (2.17.14)$$

În cazul laserului cu GaAs

$$(2l)_{rezonanţă} = \frac{0{,}86\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}{3{,}14\cdot 1{,}8\cdot 10^{-6}\cdot 25} = 15\cdot 10^{-6}\ \text{m}.$$

Se observă că în apropierea pragului pentru apariţia emisiei stimulate, grosimea mediului activ scade de două ori faţă de cazul regimului de emisie spontană.

2) Densitatea de curent j_p corespunzătoare pragului de emisie stimulată poate fi calculată printr-un raţionament simplu care nu ţine cont decît de discontinuitatea constantei dielectrice.

Dacă n e numărul de cuante conţinute într-un mod electromagnetic dat, cîştigul pe unitate de lungime se poate scrie

$$\alpha = \frac{n_r}{c}\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} \qquad (2.17.15)$$

unde n_r este indicele de refracţie şi c viteza luminii în vid. Dacă η este eficacitatea cuantică internă definită ca numărul mediu de cuante emise de purtătorii de sarcină injectaţi şi $\Delta\omega$ semilărgimea liniei emisă spontan, numărul de cuante emise spontan în unitatea de timp, în unitatea de volum şi în unitatea de interval de frecvenţe, va fi dat de

$$R = \eta\frac{j}{e\cdot 2d}\frac{1}{\Delta\omega}. \qquad (2.17.16)$$

Cunoscînd numărul n_ω de moduri electromagnetice din unitatea de volum şi unitatea de interval de frecvenţe

$$n_\omega = \frac{8\pi n^3}{\lambda^3 c} \qquad (2.17.17)$$

putem scrie cîştigul pe unitatea de lungime

$$\alpha = \frac{n_r}{c}\frac{R}{n_\omega} = \eta\,\frac{j\lambda^2}{4e\cdot 2d\Delta\omega}. \qquad (2.17.18)$$

Pragul emisiei induse e atins cînd cîştigul pe unitatea de lungime α e mai mare decît coeficientul de absorbţie Γ, care include toate pierderile prin absorbţie internă, reflexie şi difracţie, adică atunci cînd

$$\alpha = \Gamma \qquad (2.17.19)$$

de unde

$$j_p = \frac{4e\cdot 2d\cdot n_r^2\,\Delta\omega}{\eta\lambda^2}\,\Gamma. \qquad (2.17.20)$$

În cazul laserului cu GaAs densitatea de curent de prag are valoarea

$$j_p = \frac{4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}8\cdot 10^{-6}(3{,}6)^2\cdot 3{,}78\cdot 10^{13}\cdot 2\cdot 10^4}{0{,}96(84)^2\cdot 10^{-16}} = 1663{,}2\cdot 10^4\ \text{A}\cdot\text{m}^{-2}.$$

2.18. 1°. Considerăm laserul cu joncţiune $p-n$ format din trei straturi dielectrice (p, regiunea activă de grosime d, n) avînd constantele dielectrice de forma

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0(K_1' - jK_1'') \text{ în regiunea } I(p) \qquad (2.18.1a)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0(K_2' + jK_2'') \text{ în regiunea II} \qquad (2.18.1b)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_0(K_3' - jK_3'') \text{ în regiunea } III\ (n) \qquad (2.18.1c)$$

ca în figura 2.18R, a.

În regiunea *II*-a, partea imaginară a constantei dielectrice e pozitivă pentru a pune în evidenţă cîştigul.

Dacă undele se propagă după direcția Oz şi $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, γ este constanta de propagare, iar p, q, r descriu distribuția cîmpului în cele trei regiuni, fiind constante de propagare transversală, ecuația undei electromagnetice în cele trei regiuni devine

$$I: \ \gamma^2 + p^2 + k^2(K_1' - jK_1'') = 0 \tag{2.18.2a}$$

$$II: \ \gamma^2 - q^2 + k^2(K_2' + jK_2'') = 0 \tag{2.18.2b}$$

$$III: \ \gamma^2 + r^2 + k^2(K_3' - jK_3'') = 0. \tag{2.18.2c}$$

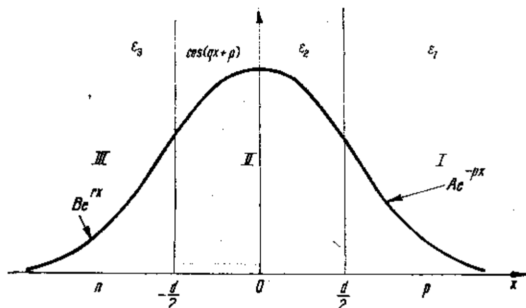


Fig. 2.18R, a

Pentru scrierea convenabilă a condiției de continuitate la graniță, facem următoarea schimbare de variabile

$$D = \sqrt{K_2' - K_1'}\, kd \tag{2.18.3a}$$

$$Q = \frac{q}{k\sqrt{K_2' - K_1'}} \tag{2.18.3b}$$

$$P = \frac{p}{k\sqrt{K_2' - K_1'}} \tag{2.18.3c}$$

$$R = \frac{r}{k\sqrt{K_2' - K_1'}} \tag{2.18.3d}$$

$$\eta = \frac{K_2' - K_3'}{K_2' - K_1'} \tag{2.18.3e}$$

care de fapt corespunde unei normări a variației mărimilor după direcția transversală (direcția Ox) față de o unitate de lungime egală cu $\frac{1}{k\sqrt{K_2' - K_1'}}$. Astfel D devine grosimea regiunii active, P, Q, R sînt constantele de propagare în noua scară a lungimii și η un parametru ce măsoară asimetria straturilor dielectrice. Pentru o structură simetrică, $\eta = 1$. Dacă se numără regiunile în așa fel încît $K_1' \geqslant K_3'$, atunci $1 \leqslant \eta < \infty$.

Scăzînd (2.18.2b) din (2.18.2a) obținem

$$p^2 + q^2 = k^2[(K_2' - K_1') - j(K_2'' + K_1'')] \qquad (2.18.4)$$

și împărțind la $k^2(K_2' - K_1')$, obținem relația

$$P^2 + Q^2 = 1 + \frac{j(K_2'' + K_1'')}{K_2' - K_1'}. \qquad (2.18.5)$$

La fel scăzînd (2.18.2b) din (2.18.2c) și împărțind la $k^2(K_2' - K_1')$ obținem

$$R^2 + Q^2 = \eta + j\frac{K_3'' + K_2''}{K_2' - K_1'}. \qquad (2.18.6)$$

Folosind relațiile (2.18.5) și (2.18.6), condiția de continuitate la graniță pentru modurile TE (pentru modurile TM condiția diferă foarte puțin dacă $K_2' - K_1' \simeq 0$) se scrie astfel

$$\operatorname{tg} qd = \frac{p/q + r/q}{1 - \frac{p}{q}\frac{r}{q}} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{p}{q} + \operatorname{arctg}\frac{r}{q}\right) \qquad (2.18.7)$$

care se mai poate scrie

$$QD = \operatorname{arctg}\frac{P}{Q} + \operatorname{arctg}\frac{R}{Q} \qquad (2.18.8)$$

sau

$$QD = \arccos\frac{Q}{\sqrt{1 + j\,\frac{K_2'' + K_1''}{K_2' - K_1'}}} + \arccos\frac{Q}{\sqrt{\eta + j\,\frac{K_2'' + K_3''}{K_2' + K_1'}}} \qquad (2.18.9)$$

Pentru o pierdere finită în dielectrici cîmpurile din regiunile *I* şi *III* trebuie să scadă exponenţial cînd ne îndepărtăm de regiunea *II*. Aceasta impune restricţia $K_2' > K_1', K_3'$ ceea ce înseamnă

$$Q = \frac{q}{k\sqrt{K_2' - K_1'}} \leqslant \frac{q}{k\sqrt{K_2'}} \approx 1 \qquad (2.18.10)$$

şi apare restricţia pentru D din (2.18.8)

$$D \geqslant \operatorname{arctg}\sqrt{\eta + j\frac{K_3'' + K_2''}{K_2' - K_1'} - 1} \qquad (2.18.11)$$

care atunci cînd pierderile prin dielectric sînt neglijabile, adică K_2'', $K_3'' \sim 0$, devine

$$D \geqslant \operatorname{arctg}\sqrt{\eta - 1} \qquad (2.18.12)$$

ceea ce înseamnă că pentru o joncţiune asimetrică ($\eta \gg 1$) cum e cea din cazul laserului cu joncţiune $p - n$ este necesară o grosime finită a stratului dielectric al regiunii active pentru ghidarea modurilor.

Pentru o grosime puţin mai mare decît cea minimă necesară pentru ghidarea modurilor ($D = \operatorname{arctg}\sqrt{\eta - 1}$) apare o considerabilă confinare a modurilor prin aceea că P se apropie foarte rapid de valoarea sa asimptotică egală cu 1, ceea ce se vede şi din reprezentarea grafică a lui P în funcţie de D pentru diferite simetrii de structuri ($\eta = 1, 2, 10, \infty$) din figura 2.18R, b.

2°. a) La un laser cu joncţiune $p - n$, $\eta \gg 1$ şi ecuaţia (2.18.9) se reduce la

$$QD = \arccos\frac{Q}{\sqrt{1 + j\frac{K_3'' + K_1''}{K_2' - K_1'}}}. \qquad (2.18.13)$$

expresie ce poate fi dezvoltată după

$$Q_0 = \sin Q_0 D \qquad (2.18.14)$$

unde Q_0 este expresia lui Q în funcţie de D, pentru $\eta \to \infty$ (curba corespunzătoare lui $\eta \to \infty$ din figura 2.18R, c)

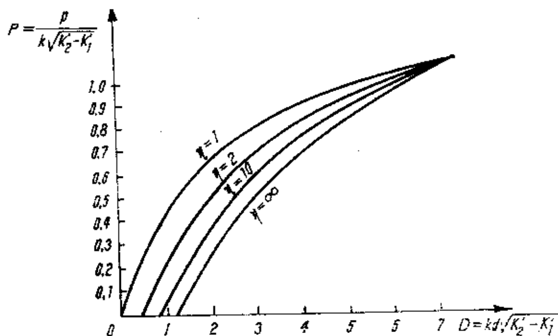


Fig. 2.18R, b

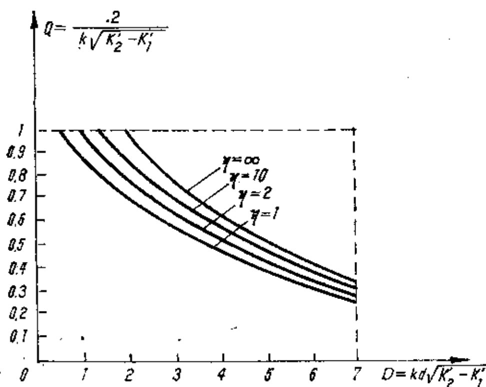


Fig. 2.18R, c

Dacă notăm

$$\sqrt{1 + j\,\frac{K_2'' + K_1''}{K_2' - K_1'}} = 1 + a + jb \qquad (2.18.15)$$

condiţia (2.18.13) dezvoltată în serie după (2.18.14) pînă la primul ordin de mărime în a şi b devine

$$Q = Q_0 + \frac{(a + jb)\, Q_0}{1 - D \cos Q_0 D}. \tag{2.18.16}$$

Deoarece $\frac{\pi}{2} \leqslant Q_0 D \leqslant \pi$, cînd $\frac{d}{2} \leqslant D \leqslant \infty$, rezultă că $1 - D \cos Q_0 D > 1$.

Pentru a-l afla pe P, rezolvăm (2.19.5) după Q, adică

$$Q = \sqrt{P^2 - 1 - j\,\frac{(K_2'' + K_1'')}{K' + K'}} \tag{2.18.17}$$

şi înlocuim in (2.19.13)

$$D\sqrt{P^2 - 1 - j\,\frac{K_2'' + K_1''}{K_2' - K_1'}} = \arccos \frac{\sqrt{P^2 - 1 - j\,\frac{(K_2'' + K_1'')}{K_2' - K_1'}}}{\sqrt{1 + j\,\frac{(K_2'' + K_1'')}{K_2' - K_1'}}}$$

care se mai poate scrie şi sub forma

$$D\sqrt{1 + j\,\frac{K_2'' + K_1''}{K_2' - K_1'}}\sqrt{1 - \left[\frac{P}{1 + j\,\frac{K_2'' + K_1''}{K_2' - K_1'}}\right]^2} = \arccos \frac{-P}{\sqrt{1 + j\,\frac{K_2'' + K_1''}{K_2' - K_1'}}}. \tag{2.18.18}$$

Această ecuaţie poate fi dezvoltată după P_0 care rezultă din $D\sqrt{1 - P_0^2} = \arccos(-P_0)$ aceasta fiind curba reprezentată pentru $\eta \rightarrow \infty$ in figura 2.18R.

Oprindu-ne la termenul de ordinul întîi al dezvoltării în serie, după a şi b, găsim

$$P = P_0 + \frac{(a + jb)(P_0 + D)}{1 + P_0 D}. \tag{2.18.19}$$

În acest caz expresiile cîmpului electric în cele trei regiuni devin

$$E_1 = \frac{1}{2} A \exp - [px] + A^* \exp[- p^* x]) \qquad (2.18.20a)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} [\cos (qx + \Phi) + \cos (q^* x + \Phi^*)] \qquad (2.28.20b)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} (B \exp [rx] + B^* \exp [r^* x]) \qquad (2.18.20c)$$

unde

$$A = Q \exp \left[\frac{PD}{2} \right] \qquad (2.18.21a)$$

$$B = \frac{Q}{\sqrt{\eta}} \exp \left[\frac{RD}{2} \right] \qquad (2.18.21b)$$

şi

$$\cos 2\Phi = \frac{Q^2}{\sqrt{\eta}} \left(1 + \frac{PR}{Q^2} \right). \qquad (2.18.21c)$$

Pentru $D \to \infty$, $a \to 1$ şi $b \to 0$.

b) În cazul unui laser cu joncţiune $p - n$ cum ar fi cel cu GaAs, care are $\eta = \infty$ şi o grosime a joncţiunii $d = 2 \cdot 10^{-6}$ m, cîmpul din prima regiune scade conform relaţiei

$$E_1 \sim \exp [- 0{,}69 x] \cos 0{,}57 x$$

care, dacă neglijăm pierderile prin dielectric (K_1'', K_2'', $K_3'' = 0$), devine

$$E_1 \sim \exp [- 0{,}53 x]$$

foarte puţin diferită de primul caz.

Aceasta justifică neglijarea în calcule a pierderilor prin dielectric şi expresiile cîmpului electric în cele trei regiuni devin

$$E_1 = A \exp [- px] \qquad (2.18.22a)$$

$$E_2 = \cos (qx + \Phi) \qquad (2.18.22b)$$

$$E_3 = B \exp [rx] \qquad (2.18.22c)$$

3°. Puterea medie, disipată pe unitatea de suprafață, se poate scrie, în cazul celor trei regiuni, în funcție de conductivitatea electrică a fiecărei regiuni sub forma

$$P_1 = \frac{\sigma_{e_1}}{2}\int_{\frac{d}{2}}^{\infty} E_1^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma_{e_1}}{2}\int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \exp\,[-2px]\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma_{e_1} A^2}{4p}\exp[-pd] \tag{2.18.23a}$$

$$P_2 = \frac{\sigma_{e_2}}{1}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_2^2\,\mathrm{d}x = \sigma_{e_2}\int_0^{\frac{d}{2}} \cos^2(qx+\Phi)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sigma_{e_2}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4q}\sin^2(qx+\Phi)\right]_0^{\frac{d}{2}} = \tag{2.18.23b}$$

$$= \frac{\sigma_{e_2}}{4}\left(d + \frac{1}{q}\sin qd\cos^2 2\Phi\right)$$

și

$$P_3 = \frac{\sigma_{e_3}}{2}\int_{-\infty}^{-\frac{d}{2}} E_3^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma_{e_3}}{2}\int_{-\infty}^{-\frac{d}{2}} B^2\exp\,[2rx]\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma_{e_3} B^2}{4r}\exp\,[-rd] \tag{2.18.23c}$$

iar energiile mediate în timp din cele trei regiuni sînt

$$\mathscr{E}_1 = \frac{K_1'\varepsilon_0}{2}\int_{d/2}^{\infty} E_1^2\,\mathrm{d}x = \frac{K_1'\varepsilon_0 A^2}{4p}\exp\,[-pd] \tag{2.18.24a}$$

$$\mathscr{E}_2 = \frac{K_2'\varepsilon_0}{4}\left(d + \frac{1}{q}\sin qd\cos 2\Phi\right) \tag{2.18.24b}$$

și

$$\mathscr{E}_3 = \frac{K_3'\varepsilon_0 B^2}{4r}\exp\,[-rd] \tag{2.18.24c}$$

unde σ_{e_2} este negativ pentru că în regiunea a *II*-a avem cîștig.

Din definiţia factorului de calitate

$$Q_c = \omega \frac{\text{energia înmagazinată în oscilator}}{\text{energia pierdută pe secundă}}$$

urmează că

$$Q_c = \frac{\omega \mathscr{E}}{\mathscr{P}} = \frac{\omega\, \varepsilon_0}{\sigma_e}.$$

Din teoria laserilor cunoaştem legătura dintre factorul de calitate şi coeficientul de amplificare

$$Q_c\, \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c},$$

de unde

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0\, c} = \frac{\mathscr{P}}{\mathscr{E}} \frac{K}{c}. \tag{2.18.25}$$

Coeficientul de amplificare al undei ghidate capătă forma

$$\alpha = \left(\frac{P_1 + P_2 + P_3}{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3}\right) \frac{K'}{c} \tag{2.18.26}$$

cu condiţia $K' \approx K_1', K_2', K_3'$.

Înlocuim expresiile (2.18.23a), b, c) şi (2.18.24a, b, c) şi obţinem

$$\alpha = \frac{\dfrac{\sigma_{e_1} A^2}{4p} \exp[-pd] + \dfrac{\sigma_{e_2}}{4}\left(d + \dfrac{1}{2} \sin q \cos 2\Phi\right) + \dfrac{\sigma_{e_3} B^2}{4r} \exp[-rd]}{\dfrac{K_1'\varepsilon_0}{4p} A^2 \exp[-pd] + \dfrac{K_2'\varepsilon_0}{4}\left(d + \dfrac{1}{q} \sin qd + \cos 2\Phi\right) \dfrac{K_3'\varepsilon_0 B^2}{4r} \exp[-rd]} \cdot \frac{K'}{c} \tag{2.18.27}$$

şi ţinînd cont de (2.18.21a, b, c)

$$\alpha = \frac{\dfrac{\sigma_{e_1}}{\varepsilon_0 c} \dfrac{Q^2}{p} + \dfrac{\sigma_{e_2}}{\varepsilon_0 c}\left[d + \dfrac{Q^2}{q\sqrt{\eta}}\left(1 + \dfrac{PR}{Q}\right) \sin qd\right] + \dfrac{\sigma_{e_3}}{\varepsilon_0 c} \dfrac{Q^2}{\eta}}{\dfrac{Q^2}{p} + d + \dfrac{Q^2}{q\sqrt{\eta}}\left(1 + \dfrac{PR}{Q}\right) \sin qd + \dfrac{Q^2}{r\eta}}. \tag{2.18.28}$$

Împărțim cu $\frac{Q^2}{p}$ și facem notațiile

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_{e_1}}{\varepsilon_0 c} \qquad (2.18.29a)$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_{e_2}}{\varepsilon_0 c} \qquad (2.18.29b)$$

$$\alpha_3 = \frac{\sigma_{e_3}}{\varepsilon_0 c} \qquad (2.18.29c)$$

atunci

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \left[\frac{pd}{Q^2} + \frac{p}{2\sqrt{\eta}} \left(1 + \frac{PR}{Q}\right) \sin qd \right] + \frac{p}{r\eta} \alpha_3}{1 + \frac{pd}{Q^2} + \frac{p}{q\sqrt{\eta}} \left(1 + \frac{PR}{Q^2}\right) \sin qd + \frac{p}{r\eta}} \qquad (2.18.30)$$

și conform cu (2.18.3a, b, c, d)

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \left[\frac{PD}{Q^2} + \frac{P}{Q\sqrt{\eta}} \left(1 + \frac{PR}{Q}\right) \sin QD \right] + \frac{P}{R\eta} \alpha_3}{1 + \frac{PD}{Q^2} + \frac{P}{Q\sqrt{\eta}} \left(\eta + \frac{PR}{Q^2}\right) \sin QD + \frac{P}{R\eta}} \qquad (2.18.31)$$

sau prescurtat

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 f(D) + \frac{P}{\eta R} \alpha_3}{1 + f(D) + \frac{P}{\eta R}} \qquad (2.18.32)$$

unde

$$f(D) = \frac{PD}{Q^2} + \frac{P}{Q\sqrt{\eta}} \left(1 + \frac{PR}{Q^2}\right) \sin QD. \qquad (2.18.33)$$

Pentru a avea un cîștig net trebuie ca pierderile datorate cîmpurilor din regiunile pasive să fie mai mici decît cîștigul dat de cîmpul din regiunea activă.

Deci, pentru coeficientul de amplificare $-\alpha \geqslant 0$, trebuie ca

$$\alpha_1 + \alpha_2 f(D) + \frac{P}{\eta R}\alpha_3 \leqslant 0 \quad \text{sau}$$

$$-\alpha_2 f \geqslant \alpha_1 + \alpha_3 \frac{P}{\eta R}. \tag{2.18.34}$$

La laserul cu GaAs, din cauza asimetriei joncţiunii, $\eta \gg 1$, deci $\frac{P}{\eta R} \to 0$ şi se poate neglija. Condiţia de prag rămîne

$$-\alpha_2 f(D) \geqslant \alpha_1. \tag{2.18.35}$$

2.19. Considerînd interacţia dintre radiaţie (sistemul „cîmp electromagnetic") şi substanţă (sistem de atomi cu două stări energetice), procesele de absorbţie, emisie spontană şi emisie stimulată duc la următoarea ecuaţie de echilibru staţionar

$$B_{12} N_1 u_\omega = (A_{21} + B_{21} u_\omega) N_2 \tag{2.19.1}$$

în care N_1 şi N_2 reprezintă numărul de atomi („populaţia") de pe nivelul energetic fundamental de energie $\mathscr{E}_1$ şi, respectiv de pe nivelul excitat, de energie $\mathscr{E}_2$; B_{12} şi B_{21} reprezintă coeficienţii Einstein de absorbţie stimulată, respectiv de emisie stimulată; A_{21} — coeficientul Einstein de emisie spontană şi u_ω — densitatea de radiaţie a cîmpului electromagnetic (fig. 2.19R).

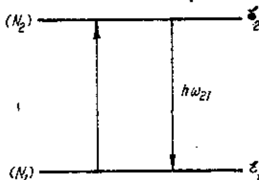


Fig. 2.19R

Împărţind ecuaţia (2.19.1) cu A_{21}, avem

$$N_1 \frac{B}{A} u_\omega = \left(1 + \frac{B}{A} u_\omega\right) N_2 \tag{2.19.2}$$

dacă: $B_{12} = B_{21} = B$ şi $A_{21} = A$.

Numărul de moduri pe unitatea de volum ale unui oscilator în vid, este

$$z = \frac{\omega^2}{2\pi^2} \frac{d\omega}{c^3}. \tag{2.19.3}$$

Densitatea de radiație, în intervalul de frecvență (ω, $\omega + d\omega$), este

$$u_\omega \, d\omega = 2\pi n \hbar \omega \tag{2.19.4}$$

n fiind numărul de fotoni pe unitatea de volum.

Numărul de fotoni pe mod este

$$n' = \frac{n}{z} = \frac{\pi c^3}{\hbar} \frac{u_\omega}{\omega^3}. \tag{2.19.5}$$

Ținînd seama că

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{\pi c^3} \omega^3 \tag{2.19.6}$$

relația (2.19.5) devine

$$n' = \frac{B}{A} u_\omega. \tag{2.19.7}$$

Introducînd expresia (2.19.7) în (2.19.2), rezultă

$$N_1 n' = N_2 (1 + n'). \tag{2.19.8}$$

Termenul $N_1 \cdot n'$ corespunde absorbției induse, $N_2 \cdot 1$ emisiei spontane iar $N_2 \cdot n'$ emisiei induse. Deci, emisia spontană corespunde emisiei induse dacă ar fi un singur foton pe mod.

2.20. 1°. Prezența – în cavitate – a unei unde electromagnetice, reprezentată prin

$$\bar{E} = \bar{E}_0(\bar{r}) \exp[i\omega t] \tag{2.20.1}$$

induce în mediu o polarizare

$$\bar{P} = \mathrm{Re}\{\varepsilon_0 \chi \bar{E}_0(\bar{r}) \exp[i\omega t]\}. \tag{2.20.2}$$

În expresia (2.21.2), susceptibilitatea electrică este

$$\chi = \chi' - i\chi'', \tag{2.20.3}$$

unde

$$\chi = \frac{N_1 - N_2}{V} \chi_a \tag{2.20.4}$$

N_1 fiind numărul de atomi („populația") de pe nivelul energetic $\mathscr{E}_1$, N_2, — numărul de electroni pe nivelul energetic $\mathscr{E}_2$ și χ_a — susceptibilitatea atomică.

Inducția electrică în mediu este dată de relația

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}. \tag{2.20.5}$$

Energia electromagnetică pe unitatea de volum, în mediu, este

$$\mathscr{E}_{EM} = \frac{1}{2}(\bar{E}_0 \bar{D}) = \frac{1}{2} E_0(\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon_0 \chi' E_0) =$$

$$= \frac{1}{2} E_0^2 \varepsilon_0 (1 + \chi') = \frac{1}{2} E_0^2 \varepsilon_0 \varepsilon' \tag{2.20.6}$$

considerînd că

$$\varepsilon_r = \varepsilon' - i\varepsilon'' = 1 + \chi' - i\chi'' = 1 + \chi. \tag{2.20.7}$$

Polarizația $\bar{P}$ dă naștere curentului electric de densitate

$$\bar{J} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \tag{2.20.8}$$

și, astfel, energia pierdută (sau cîștigată) pe unitatea de timp și în unitatea de volum este (în medie)

$$\mathscr{E}_P = \frac{1}{2}(\bar{E}_0 \bar{J}) = \frac{1}{2} E_0^2 \varepsilon_0 \omega \chi''. \tag{2.20.9}$$

S-a considerat că

$$\bar{J} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \bar{P}}{\partial t}\right\} = \mathrm{Re}\{\varepsilon_0 \chi i \omega \bar{E}_0 \exp[i\omega t]\} =$$

$$= \mathrm{Re}\{\varepsilon_0 \omega (\chi'' + i\chi') \bar{E}_0 \exp[i\omega t]\}. \tag{2.20.10}$$

Ținînd seama de faptul că susceptibilitatea χ_a, calculată cu ajutorul teoriei cuantice, este dată de expresia

$$\chi_a = \frac{e^2}{4\pi m} f \frac{1}{(\omega - \Omega_0) + i\frac{\Delta\omega}{2}} \tag{2.20.11}$$

rezultă :

$$\chi' = \frac{e^2}{4\pi m} \frac{f}{V} (N_1 - N_2) \frac{\omega - \Omega_0}{(\omega - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2} \tag{2.20.12}$$

și

$$\chi'' = \frac{e^2}{4\pi m} \frac{f}{V} (N_1 - N_2) \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{(\omega - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2} \tag{2.20.13}$$

unde e este sarcina electronului, m —masa electronului, f — forța oscilatorului, ω — frecvența cîmpului și Ω_0 — frecvența tranziției dintre nivelele $|2>$ și $|1>$.

Ținînd seama de (2.20.9) și (2.20.13), rezultă

— pentru $N_1 > N_2$, $\chi'' > 0$, sîntem în cazul echilibrului termic

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left[-\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{kT}\right] \tag{2.20.14}$$

și unda electromagnetică pierde energie (absorbția radiției undei electromagnetice de către mediu);

— pentru $N_2 > N_1$, $\chi'' < 0$, sîntem în cazul „inversiei de populație" și unda electromagnetică va cîștiga energie (amplificarea radiației undei electromagnetice de către mediu).

2°. Analog coeficientului de supratensiune al unui circuit oscilant, factorul de calitate al mediului este

$$Q_{EM} = \frac{\omega\mathcal{E}_{EM}}{\mathcal{E}_p} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \tag{2.20.15}$$

În funcție de indicele de refracție n_r și de indicele de extincție $\varkappa$ vom avea

$$Q_{EM} \approx \frac{n_r}{2\varkappa}, \tag{2.20.16}$$

deoarece

$$n^2 = (n_r - i\varkappa)^2 = \varepsilon' - i\varepsilon'' \tag{2.20.17}$$

adică

$$n_r^2 - \varkappa^2 = \varepsilon'; \quad 2n_r \cdot \varkappa = \varepsilon'' \tag{2.20.18}$$

și

$$\varkappa \ll n_r \tag{2.20.19}$$

în cazul mediilor puțin dense.

3°. Din (2.20.9) și (2.20.13) se observă că :

$$\frac{N_1}{V} \frac{-\frac{\Delta\omega_0}{2}}{(\omega - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\Delta\omega_0}{2}\right)^2} \tag{2.20.20}$$

conține procesul de absorbție,

$$\frac{N_2}{V} \frac{i\frac{\Delta\omega_0}{2}}{(\omega - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\Delta\omega_0}{2}\right)^2} \tag{2.20.21}$$

conține procesul de emisie indusă (forțată) și

$$\Delta\omega_0 \approx \frac{2\pi}{\tau} \tag{2.20.22}$$

unde τ este timpul mediu de viață al stării excitate, evidențiază procesul de emisie spontană.

Din punct de vedere macroscopic, observăm că teoria absorbției și emisiei induse se bazează pe linearitatea răspunsurilor (polarizație) la excitații (cîmpuri electrice). Dacă excitația constă dintr-un pachet de unde etalat pe un interval de frecvențe $\delta\omega$, mic în comparație cu semilărgimea emisiei spontane $\Delta\omega_0$, absorbția (sau amplificarea) se face pe același interval de frecvențe. În acest sens, se poate spune că răspunsul (radiația absorbită sau amplificată) este „coerent” cu excitarea.

4°. Condiția ca sistemul global să intre în oscilație este analoagă cu cea pentru un circuit oscilant

$$\frac{1}{Q_M} + \frac{1}{Q} \leqslant 0. \tag{2.20.23}$$

Ţinînd seama de relaţiile (2.20.4), (2.20.7), (2.20.15), (2.20.18) şi de condiţia (2.20.19), rezultă

$$N_2 - N_1 \geqslant \frac{n_r^2 V}{\chi_0'' Q}. \qquad (2.20.24)$$

Deci, condiţia de oscilaţie şi cea de amplificare globală este mai restrictivă decit condiţia : $N_2 - N_1 > 0$.

2.21. 1°. $\Delta\mathscr{E} = \hbar\omega = 6{,}62\cdot 6196.10^{-34}.310^{9} = 1{,}9878\cdot 10^{-24}$ J

$$kT = 1{,}380621\cdot 10^{-23}\cdot 300 = 4{,}141863\cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$\frac{\Delta\mathscr{E}}{kT} = 3{,}33\cdot 10^{-3}$$

$$\frac{N_2 - N_1}{N_1} = \frac{N_2}{N_1} - 1 = \exp\left[-\frac{\Delta\mathscr{E}}{kT}\right] - 1$$

$$= -\frac{\Delta\mathscr{E}}{kT} \approx -3{,}33\cdot 10^{-3}$$

2°. $\Delta\mathscr{E} = \hbar\omega = 6{,}626196\cdot 10^{-24}$ J

$$kT = 5{,}6986\cdot 10^{-23} \text{ J}$$

$$\frac{\Delta\mathscr{E}}{kT} = 1{,}16\cdot 10^{-1}$$

$$\frac{N_2 - N_1}{N_1} = \frac{N_2}{N_1} - 1 = \exp\left[-\frac{\Delta\mathscr{E}}{kT}\right] - 1$$

$$= \exp[-1{,}16\cdot 10^{-1}] - 1 = \ldots$$

3°. $\Delta\mathscr{E} = \frac{hc}{\lambda} = 3{,}313098\cdot 10^{-19}$ J

$$kT = 4{,}14\cdot 1863\cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$\frac{\Delta\mathscr{E}}{kT} = 80\,; \qquad \frac{N_2}{N_1} = \exp[-80]$$

4°. $\frac{N_2}{N_1} = 10^{-1}$

$$\Delta\mathscr{E} = 3{,}313098\cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$T = \frac{\Delta\mathscr{E}}{k \ln \frac{N_1}{N_2}} = 1{,}043\cdot 10^{4} \text{ °K}.$$

2.22. Considerăm cazul în care stările sînt nedegenerate sau au aceiași grad de degenerare.

Coeficientul de absorbție este legat de partea imaginară a susceptibilității electrice rezonante prin relația

$$\Gamma_\omega = -\frac{\omega}{c}\chi_e''(\omega) \tag{2.22.1}$$

unde

$$\chi_e''(\omega) = -\frac{1}{\varepsilon_0 \hbar}\frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3}(N_1 - N_2)\frac{\frac{1}{T_2}}{(\omega-\Omega)^2+\frac{1}{T^2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{\varepsilon_0 \hbar}\frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3}(N_1 - N_2)g(\omega,\ \Omega) \tag{2.22.2}$$

unde N_2 și N_1 sînt populațiile stărilor superioară și respectiv inferioară iar $g(\omega,\ \Omega)$ este funcția de răspuns a atomilor. Atunci

$$\Gamma_\omega = \frac{\pi\omega}{c\varepsilon_0 \hbar}\frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3}(N_1 - N_2)\,g(\omega,\ \Omega). \tag{2.22.3}$$

Folosind ecuațiile (2.16.10) și (2.16.18) vom găsi următoarea ecuație pentru descrierea evoluției diferenței de populație

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_1 - N_2) + \frac{(N_1 - N_2) - (N_1 - N_2)^e}{T_1} = \frac{\varepsilon_0 \chi_e''|\bar{E}|^2}{\hbar}. \tag{2.22.4}$$

La saturare se atinge o stare staționară astfel încît populația în acest caz va fi dată de

$$(N_1 - N_2) = (N_1 - N_2)^e + \frac{\varepsilon_0 T_1 \chi_e''|\bar{E}|^2}{\hbar}. \tag{2.22.5}$$

Folosind ecuația (2.22.2) obținem

$$N_1 - N_2 = \frac{(N_1 - N_2)^e}{1 + \frac{T_1\pi}{\hbar^2}\frac{|\mu_{12}^e|^2}{3}|\bar{E}|^2 g(\omega,\ \Omega)}. \tag{2.22.6}$$

În cazul cînd frecvența radiației ω ar fi egală cu frecvența centrală a curbei de răspuns a atomilor, Ω, atunci $g(\Omega,\ \Omega) = \frac{T_2}{\pi}$.

Punînd în evidență acest factor putem scrie ecuația (2.22.6) sub forma

$$N_1 - N_2 = \frac{(N_1 - N_2)^e}{1 + \frac{T_1 T_2}{\hbar} \frac{|\bar{\mu}_{12}|^2}{3} |\bar{E}|^2 \frac{\pi}{T_2} g(\omega, \Omega)}. \qquad (2.2.27)$$

Intensitatea radiației fiind dată de relația

$$I = \frac{1}{2} n_r \varepsilon_0 c |\bar{E}|^2; \qquad (2.22.8)$$

introducem notația

$$I_{sat} = \frac{3 n_r \varepsilon_0 c \hbar^2}{2 T_1 T_2 |\bar{\mu}_{12}^e|^2} \qquad (2.22.9)$$

numită intensitate de saturare, deoarece cînd $I = I_{sat}$ valoarea lui $N_1 - N_2$ se reduce la $\frac{1}{2}(N_1 - N_2)^e$.

Introducînd (2.22.7) în (2.22.3)

$$\Gamma_\omega = \frac{\pi\omega}{c\varepsilon_0\hbar} \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} \frac{(N_1 - N_2)^e g(\omega, \Omega)}{1 + \frac{I}{I_{sat}} \frac{\pi}{T_2} g(\omega, \Omega)}. \qquad (2.22.10)$$

În cazul cînd $I \ll I_{sat}$ coeficientul de absorbție capătă valoarea nesaturată

$$\Gamma_{0\omega} = \frac{\pi\omega}{c\varepsilon_0\hbar} \frac{|\mu_{12}^e|^2}{3} (N_1 - N_2)^e g(\omega, \Omega). \qquad (2.22.11)$$

Experimental, nu se poate măsura coeficientul de absorbție la o frecvență strict determinată ci numai coeficientul de absorbție integral dat de

$$2\Gamma_0 \Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{0\omega} d\omega = \frac{\pi\Omega}{c\varepsilon_0\hbar} \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} (N_1 - N_2)^e. \qquad (2.22.12)$$

Cu aceasta, ecuația (2.23.10) se poate scrie

$$\Gamma_\omega = \frac{2\Delta\omega \Gamma_0 g(\omega, \Omega)}{1 + \frac{I}{I_{sat}} \frac{\pi}{T_2} g(\omega, \Omega)}. \qquad (2.22.13)$$

Pentru a afla coeficientul de absorbţie saturat integral vom integra peste toate frecvenţele

$$\Gamma = \Gamma_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega, \Omega)d\omega}{1 + \frac{I}{I_{sat}} \frac{\pi}{T_2} g(\omega, \Omega)} \tag{2.22.14}$$

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{\tau} d\omega}{(\omega - \Omega)^2 + \frac{1}{T_2^2}\left(1 + \frac{I}{I_{sat}}\right)} = \frac{\Gamma_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \cdot \tag{2.22.15}$$

Măsurarea experimentală a coeficientului de absorbţie se face măsurînd intensitatea I_0 a luminii incidente pe probă şi intensitatea I după ce lumina a străbătut lungimea l

$$I = I_0 \exp[-\Gamma l] \tag{2.22.16}$$

de unde

$$\Gamma = -\frac{1}{l} \ln \frac{I}{I_0} \cdot \tag{2.22.17}$$

Cînd intensitatea incidentă I_0 este redusă, relaţia (2.22.16) furnizează valoarea Γ_0 nesaturată.

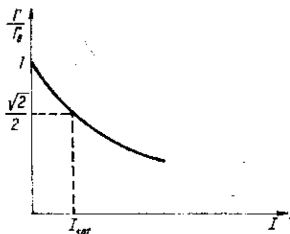


Fig. 2.22R

Determinarea experimentală a intensităţii de saturare se va face reprezentînd grafic funcţia Γ din relaţia (2.22.15) scrisă sub forma

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{I}{I_{sat}}}} \cdot \tag{2.22.18}$$

Curba obţinută este arătată în fig. 2.22.R. Se observă că raportul $\frac{\Gamma}{\Gamma_0}$ capătă valoarea $1\sqrt{2}$ pentru $I = I_{sat}$. În acest mod se găseşte valoarea dată în text pentru I_{sat}. Adăugînd celor arătate relaţia

$$2\Delta\omega = \frac{1}{T_2} \tag{2.22.19}$$

unde T_2 este timpul de relaxare transversală, avem toate relaţiile necesare calculului cerut.

Din ecuaţia (2.22.12), ţinînd seama că la echilibru populaţia nivelului excitat $N_2 \approx 0$ deci $N_1 \approx N_0$

$$\Gamma_0 = \frac{\pi\omega_0}{2\Delta\omega\varepsilon_0\hbar}\frac{|\bar{\mu}_{12}^{e}|^2}{3}N_0. \qquad (2.22.20)$$

Din ecuaţia (2.23.20) obţinem momentul de dipol al tranziţiei

$$|\overline{\mu_{12}^{e}}|^2 = \frac{6\Gamma_0 c\varepsilon_0\hbar\Delta\omega}{\pi\Omega N_0}. \qquad (2.22.21)$$

Introducem (2.22.21) şi (2.22.19) în (2.22.9) se obţine

$$I_{sat} = \frac{n_r\hbar\pi\Omega N_0}{2T_1\Gamma_0}. \qquad (2.22.22)$$

De aici

$$T = \frac{n_r\hbar\pi\Omega N_0}{2\Gamma_0 I_{sat}} = 3\cdot 10^{-4}\ \text{s}.$$

2.23. Pentru a găsi diferenţa de populaţie de prag vom lua în considerare faptul că oscilaţia începe atunci cînd cîştigul dat de mediul activ depăşeşte pierderile. Notînd cu γ pierderile relative în timpul unui parcurs complet, pierderile relative pe unitatea de lungime vor fi date de

$$f = \frac{\gamma}{2l}. \qquad (2.23.1)$$

Conform celor afirmate de problemă pierderile provin din reflexiile pe oglinzi deci, notînd cu I_0 intensitatea într-un punct, după reflexie pe oglinda *1* ea devine $I_0\mathcal{R}_1$, iar după reflexia şi pe cealaltă oglindă ajunge în punctul iniţial cu o valoare $I_0\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$. Pierderea de intensitate pentru un parcurs complet va fi

$$I = I_0\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 = I_0\exp[-2lf] \qquad (2.23.2)$$

sau

$$\ln \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 = -2fl \qquad (2.23.3)$$

de unde

$$f = -\frac{\ln\sqrt{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}}{l}. \qquad (2.23.4)$$

Notînd cîştigul relativ pe unitatea de lungime $\alpha = -\Gamma$, condiţia de prag va fi

$$\alpha \geqslant f = -\frac{\ln \sqrt{\mathscr{R}_1 \mathscr{R}_2}}{l}. \tag{2.23.5}$$

Ţinînd seama de ecuaţiile (2.22.12) (în care $(N_1 - N_2)^e$ va reprezenta diferenţa de populaţie de prag) şi (2.22.20),

$$\alpha = \frac{\pi\omega}{2c\varepsilon_0 \Delta\omega h} \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} (N_2 - N_1) \tag{2.23.6}$$

sau

$$\alpha = \frac{\Gamma_0}{N_0} (N_2 - N_1). \tag{2.23.7}$$

Cu ecuaţia (2.23.5) se poate scrie

$$-\frac{\ln \sqrt{\mathscr{R}_1 \mathscr{R}_2}}{l} = \frac{\Gamma_0}{N_0} (N_2 - N_1). \tag{2.23.8}$$

Diferenţa de populaţie de prag va fi

$$(N_2 - N_1)_p = -\frac{N \ln \sqrt{\mathscr{R}_1 \mathscr{R}_2}}{l\Gamma_0}. \tag{2.23.9}$$

Cu datele din enunţ

$$(N_2 - N_1)_p = 5 \cdot 10^{22}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

2°. Pentru a afla puterea de pompaj necesară realizării condiţiei de prag, observăm că aceasta este dată de expresia

$$\mathscr{P}_p = [(N_2 - N_1) - (N_2 - N_1)_p^e] \frac{\hbar\omega}{2T} \tag{2.23.10}$$

factorul $\frac{1}{2}$ apare deoarece variaţia populaţiilor celor două nivele cu o unitate, prin absorbţia sau emisia energiei $\hbar\omega$, are drept consecinţă variaţia diferenţei de populaţie cu două unităţi, iar T este timpul de relaxare spre starea de echilibru în lipsa pompajului.

Ținînd seama că în cazul echilibrului termic $N_2^e \approx 0$, deci $N_1^e \approx \approx N_0$, ecuația (2.23.10) devine

$$\mathscr{P}_p = (N_2 - N_1 + N_0)\frac{\hbar\omega}{2T}\,.$$

Folosind valoarea determinată mai sus pentru diferența de populație, obținem

$$\mathscr{P}_p = 4\cdot 10^8\ \mathrm{J/m^3\cdot s}.$$

2.24. Pornim de la condiția de prag

$$\alpha_0 \geqslant \frac{\gamma}{l} \qquad (2.24.1)$$

unde α_0 este cîștigul integral, nesaturat, definit de

$$2\alpha_0\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{0\omega}\mathrm{d}\omega.$$

În cazul gazului lărgirea fiind de tip Doppler coeficientul de absorbție nesaturat va fi dat de

$$\Gamma_{0\omega} = -\frac{\pi\omega}{3c\hbar\varepsilon_0}|\bar{\mu}_{23}^e|^2(N_3g_2 - N_2g_3)\,D(\omega_0,\ \Omega_i) \qquad (2.24.2)$$

unde $D(\Omega_i,\ \omega_0)$ este funcția de profil a liniei spectrale.

Coeficientul de absorbție integral va fi dat de

$$2\Gamma_0\Delta\omega_D = -\frac{\pi\omega}{3c\hbar\varepsilon_0}|\bar{\mu}_{23}^e|^2(N_3g_2 - N_2g_3) \qquad (2.24.3)$$

unde

$$\Delta\omega_D = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2RT\ln 2}{M}} \qquad (2.24.4)$$

este semilărmgiea liniei Doppler.

Ținînd seama că probabilitatea de tranziție pe unitatea de timp între nivelurile laser $|2>$ și $|3>$ stimulată de o radiație cu bandă largă de frecvențe de densitate spectrală u_ω^* este dată de expresia

$$W_{23} = \frac{\pi}{\hbar^2\varepsilon_0}\frac{|\bar{\mu}_{23}^e|^2}{3}u_{\omega_0} = \frac{B_{23}}{g_3}u_{\omega_0} \qquad (2.24.5)$$

ecuaţia (2.24.3) poate fi transcrisă sub forma

$$2\Gamma_0\Delta\omega_D = -\frac{\hbar\omega}{c}\frac{B_{23}}{g_3}(N_3g_2 - N_2g_3). \quad (2.24.6)$$

Cum $\alpha_0 = -\Gamma_0$, se obţine

$$\alpha_0 = \frac{B_{23}\hbar\omega}{g_3\cdot\Delta\omega_D\cdot c}(N_3g_2 - N_2g_3). \quad (2.24.7)$$

Ţinînd seama de ecuaţia (2.24.1)

$$N_3\frac{g_2}{g_3} - N_2 = \frac{\gamma}{l}\frac{\Delta\omega_Dc}{B_{23}\hbar\omega}. \quad (2.24.8)$$

Înlocuind $\Delta\omega_D$ din ecuaţia (2.24.4), obţinem

$$N_3\frac{g_2}{g_3} - N_2 = \frac{\gamma}{l}\frac{1}{\hbar B_{23}}\sqrt{\frac{2RT_t\ln 2}{M}}. \quad (2.24.9)$$

Conform relaţiei dintre coeficienţii lui Einstein

$$B_{23} = B_{32}\frac{g_3}{g_2} = \frac{g_3}{g_2}\frac{\pi^2c^3}{\hbar\omega^3}A_{32}. \quad (2.24.10)$$

Ecuaţia (2.25.9) va deveni

$$N_3 - N_2\frac{g_3}{g_2} = \frac{\gamma}{l}\frac{\omega^3}{\pi^2c^3A_{32}}\sqrt{\frac{2RT\ln 2}{M}}. \quad (2.24.11)$$

Cu datele din enunţ, luînd $A_{32} = \frac{1}{\tau}$, obţinem

$$N_3 - N_2\frac{g_3}{g_2} = 1{,}5\cdot 10^{15}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

2.25. Printr-un procedeu oarecare în timpul pompajului se menţine un factor de pierderi ridicat, ceea ce împiedică apariţia oscilaţiei. La momentul $t = 0$ cînd diferenţa de populaţie a atins o valoare foarte mare $N^{(i)}$, se readuce factorul de calitate al cavităţii la valoarea normală (Q-switching) coeficientul de pierderi căpătînd valoarea γ.

Coeficientul de amplificare este

$$\alpha = \frac{\Gamma_0 N}{N_0}. \tag{2.25.1}$$

Întrucît **intensitatea radiaţiei** creşte exponenţial după formula

$$I = I_0 \exp\left[\left(\alpha - \frac{\gamma}{d}\right) z\right] \tag{2.25.2}$$

dacă densitatea **de fotoni** într-un capăt al mediului activ este n atunci **la celălalt capăt** aceasta va căpăta valoarea

$$n' = n \exp\left[\left(\alpha - \frac{\gamma}{d}\right) d\right]. \tag{2.25.3}$$

Presupunînd

$$\alpha d - \gamma \ll 1 \tag{2.25.4}$$

putem scrie

$$n' = n\left[1 + \left(\alpha - \frac{\gamma}{d}\right) d\right]. \tag{2.25.5}$$

Ţinînd cont de faptul că în timp de o secundă radiaţia parcurge de $\frac{c}{l}$ ori **cavitatea putem** scrie

$$\frac{dn}{dt} = n\left(\alpha - \frac{\gamma}{d}\right) d \frac{c}{l} = n\left(\frac{\alpha d}{t_1} - \frac{\gamma}{t_1}\right) \tag{2.25.6}$$

unde am **notat** $t_1 = \frac{l}{c}$ **timpul în** care cîmpul de radiaţie parcurge **rezonatorul.**

Folosind ecuaţia (2.25.1) şi introducînd diferenţa de **populaţie relativă** $\eta = \frac{N}{N_0}$ **şi funcţia** $\xi = \frac{n_s}{N_0}$ obţinem pentru ecuaţia (2.25.6) **forma**

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\xi}{t_1}\left(\Gamma_0 d \eta - \gamma\right). \tag{2.25.7}$$

Măsurînd timpul în unităţi $\frac{t_1}{\gamma}$ ecuaţia (2.25.7) devine

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(\frac{\Gamma_0 d}{\gamma}\eta - 1\right)\xi. \tag{2.25.8}$$

Întrucît $N = N_2 - N_1$ **reprezintă** diferenţa de populaţie, $\frac{1}{2}\frac{dN}{dt}\hbar\omega$ **va reprezenta energia pierdută** de sistemele atomice din unitatea

de volum în unitatea de timp care va duce la creşterea energiei radiaţiei din unitatea de volum, deci putem scrie

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\hbar\omega=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\hbar\omega. \tag{2.25.9}$$

Folosind ecuaţia (2.25.6) şi considerînd în primă aproximaţie γ neglijabil în raport cu αd, ecuaţia (2.25.9) devine

$$-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=2n\frac{\Gamma_0 N}{t_1 N_0}d \tag{2.25.10}$$

sau, măsurînd timpul în unităţi $\frac{t_1}{\gamma}$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=-2\frac{\Gamma_0 d}{\gamma}n\xi. \tag{2.25.11}$$

Introducînd notaţia

$$\frac{\Gamma_0 d}{\gamma}=\frac{1}{\eta_m} \tag{2.25.12}$$

ecuaţiile (2.25.8) şi (2.25.11) devin

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\eta}{\eta_m}-1\right)\xi \tag{2.25.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=-\frac{2\eta\xi}{\eta_m}. \tag{2.25.15}$$

Din ecuaţia (2.25.13) observăm că η_m are semnificaţie de diferenţă de populaţie corespunzătoare densităţii maxime de fotoni pentru care

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=0.$$

În momentul schimbării factorului de calitate ξ are o valoare foarte mică ξ_i, apoi creşte exponenţial conform ecuaţiei (2.26.13)

pînă la valoarea maximă $\xi_m \gg \xi_i$ și în continuare scade exponențial (deoarece η devine mai mic decît η_m).

Diferența de populație scade tot timpul cum arată ecuația (2.25.14) de la valoarea inițială η_i către o valoare finală η_f.

Scoțînd ξ din ecuația (2.25.14) și introducînd în (2.25.13) obținem

$$\frac{d\xi}{dt} = -\left(\frac{\eta}{\eta_m} - 1\right)\frac{\eta_m}{2\eta_i}\frac{dn}{dt}. \tag{2.25.15}$$

Prin integrare, ținînd seama că inițial $\xi = \xi_i$ și $\eta = \eta_i$, obținem

$$\xi = \xi_i + \frac{\eta_m}{2}\ln\frac{\eta}{\eta_i} + \frac{\eta_i - \eta}{2}. \tag{2.25.16}$$

Pentru starea finală ecuația (2.26.16) devine

$$\xi_f = \xi_i + \frac{\eta_m}{2}\ln\frac{\eta_f}{\eta_i} + \frac{\eta_i - \eta_f}{2} \tag{2.25.17}$$

sau, ținînd cont de faptul că ξ_i și ξ_f sînt foarte mici,

$$\frac{\eta_f}{\eta_i} = \exp\left[-\frac{\eta_i}{\eta_m}\left(1 + \frac{\eta_f}{\eta_i}\right)\right]. \tag{2.25.18}$$

Energia totală degajată în timpul pulsului laser este dată de

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}(\eta_i - \eta_f) N_0 V \hbar\omega. \tag{2.25.19}$$

Ecuația (2.26.19) se mai scrie

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\eta_i\left(1 - \frac{\eta_f}{\eta_i}\right) N_0 V \hbar\omega. \tag{2.25.20}$$

Raportul $\frac{\eta_f}{\eta_i}$ se află cu ajutorul ecuației (2.25.18) care în acest caz devine

$$\frac{\eta_f}{\eta_i} = \exp\left[-4\left(1 - \frac{\eta_f}{\eta_i}\right)\right] = \exp(-4)\exp\left(4\frac{\eta_f}{\eta_i}\right)$$

sau, ţinînd seama că $\frac{\eta_f}{\eta_i} \ll 1$ rezultă

$$\frac{\eta_f}{\eta_i} = \frac{\exp(-4)}{1 - 4\exp(-4)} = \frac{1}{\exp(4) - 4} = 0,0196 \approx 0,02.$$

Introducînd acest rezultat în (2.25.20) şi ţinînd cont că $\gamma_m = \frac{\gamma}{\Gamma_0 d} = 0,015$,

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\,0,06(1 - 0,02)\;2\cdot10^{25}\cdot0,1\cdot10^{-4} = \frac{6,6}{2\pi}\cdot10^{-34}2,7\cdot10^{15} = 1,7\mathrm{J}$$

Din această energie numai o parte ajunge în exterior deoarece există pierderi.

Pentru calculul puterii maxime vom scrie ecuaţia (2.25.16) pentru acest moment

$$\xi_m = \frac{1}{2}\left[\eta_m \ln\frac{\eta_m}{\eta_i} - (\gamma_m - \eta_i)\right] \qquad (2.25.21)$$

unde am neglijat ξ_i în raport cu ξ_m. La acest moment puterea va fi

$$\mathscr{P}_m = \frac{\mathscr{E}}{\tau_c}\,\frac{\xi N_0 V\hbar\omega}{\tau_c} \qquad (2.25.22)$$

unde $\tau_c = \frac{l_1}{\gamma}$ reprezintă timpul de viaţă al fotonilor în cavitate.

Ţinînd seama de faptul că numai fracţiunea $\frac{\gamma_s}{\gamma}$ din puterea emisă ajunge în exterior, vom obţine pentru puterea maximă utilă a pulsului laser

$$\mathscr{P}_m^u = \frac{\gamma_s c\left[\eta_m \ln\frac{\eta_m}{\eta_i} - (\eta_n - \eta_i)\right]N_0 V\hbar\omega}{2l}.$$

Cu valorile din textul problemei se obţine

$$\mathscr{P}_m^u = 16\cdot10^6\mathrm{W} = 16\ \mathrm{MW}.$$

2.26. 1°. **Laserul cu rubin** este un laser cu trei nivele (fig.2.26). Dacă tranziția $|3> \rightarrow |2>$ este foarte rapidă, atunci $N_3 \approx 0$, $N_{i(i=1,2,3)}$ fiind populațiile celor trei nivele energetice (numărul de atomi activi pe unitatea de volum). Astfel, ecuațiile ratelor vor fi

$$N_1 + N_2 = N_0 \qquad (2.26.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \beta N_1 - Bn_i(N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau_2} \qquad (2.26.2)$$

$$\frac{dn}{dt} = V_z Bn_i(N_2 - N_1) - \frac{n}{\tau_c} \qquad (2.26.3)$$

unde : N_0 — este numărul total de atomi activi pe unitatea de volum ; βN_1 — termenul de pompaj ; n_i — numărul total de fotoni care se află în interiorul cavității ; B — coeficientul de emisie stimulată ; τ_2 — timpul mediu de viață al ionilor de pe nivelul $|2>$; V_z — volumul modului din materialul activ ; τ_c — timpul mediu de viață al fotonilor în cavitate.

În relația (2.26.3) s-a neglijat termenul datorat emisiei spontane, care este necesar numai pentru a iniția acțiunea laser.

a) Stabilirea expresiilor pentru mărimile B și τ_c.

Considerăm o undă electromagnetică care se propagă — în cavitate — înainte și înapoi. În acest caz, variația intensității radiației va fi

$$\Delta I = I\{(1 - \mathcal{T}_1)(1 - \mathcal{T}_2)(1 - T_i)^2 \exp\ [2\sigma(N_2 - N_1)\ d] - 1\} \qquad (2.26.4)$$

unde $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ sînt factorii de transmisie ai celor două oglinzi ; T_i — sînt pierderile interne pe un parcurs (datorate împrăștierii, difracției și absorbției oglinzilor) ; σ — secțiunea eficace de ciocnire a materialului activ la lungimea de undă de lucru ; d — lungumea materialului activ.

Se introduc notațiile

$$1 - \mathcal{T}_1 = \exp[-\gamma_1[\qquad (2.26.5)$$

$$1 - \mathcal{T}_2 = \exp[-\gamma_2]. \qquad (2.26.6)$$

și

$$1 - T_i = \exp\ [-\gamma_i]. \qquad (2.26.7)$$

Pentru valori mici ale lui T, avem $\gamma \approx T$. **Astfel**

$$\gamma = \gamma_i + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = \gamma_i + \gamma_u, \qquad (2.26.8)$$

unde γ_i reprezintă pierderile interne şi γ_u reprezintă **pierderile** utile (datorită cuplajului cu exteriorul). Substituind **relaţiile (2.26.5)** — (2.26.8) în (2.26.4), obţinem

$$\Delta I = 2\ [\sigma(N_2 - N_1)\ d - \gamma)]\ I. \qquad (2.26.9)$$

Considerînd că

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} \approx \frac{dI}{dt} \qquad (2.26.10)$$

unde

$$\Delta t = 2\ \frac{l}{c} \qquad (2.26.11)$$

este timpul de tranzit de «du-te — vino» al **fotonilor în cavitate,** ecuaţia (2.27.9) devine

$$\frac{dI}{dt} = \left[\left(\frac{\sigma_c}{l}\right)(n_2 - n_1)\ d - \frac{\gamma_c}{l}\right] I. \qquad (2.16.12)$$

Deoarece $n_t \propto I$, avem

$$\frac{dn_t}{dt} = V_z B n_t (N_2 - N_1) - \frac{n_t}{\tau_c} = \left[V_z B(N_2 - N_1) - \frac{1}{\tau_c}\right] n_t. \qquad (2.26.13)$$

Comparînd (2.26.12) cu (2.26.13), obţinem

$$B = \frac{\sigma_c d}{l V_z} = \frac{\sigma_c}{V_z} \qquad (2.26.14$$

şi

$$\tau_c = \frac{l}{\gamma c}. \qquad (2.26.15)$$

Din relațiile (2.26.15) și (2.26.8), rezultă

$$\frac{1}{\tau_c} = (\gamma_i + \gamma_u)\frac{c}{l} = \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_e}. \qquad (2.26.16)$$

b) Punînd

$$N = N_2 - N_1, \qquad (2.26.17)$$

ecuațiile ratelor (2.26.2) — (2.26.3) devin

$$\frac{dN}{dt} = \beta(N_0 - N) - 2Bn_t N - \frac{(N_0 + N)}{\tau} \qquad (2.26.18)$$

și

$$\frac{dn_t}{dt} = \left(V_z BN - \frac{1}{\tau_c}\right) n_t \qquad (2.26.19)$$

β fiind rata de pompaj.

În cazul «comutării rapide», se presupune că la $t = 0$ pierderile sînt comutate brusc de la o valoare mare la o valoare scăzută.

Din ecuația (2.26.18), punînd $\frac{dN}{dt} = 0$ și $\frac{dn_t}{dt} = 0$ (pompajul este aplicat un timp suficient de lung, astfel — încît — se atinge starea staționară), rezultă

$$N_i = N_0 \frac{\beta\tau - 1}{\beta\tau + 1}. \qquad (2.26.20)$$

Considerînd că $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2 = 0$, avem inversia de populație critică, N_c, obținută din aceeași ecuație $\left(\text{pentru } \frac{dN}{dt} = 0 \text{ și } \frac{dn_t}{dt} = 0\right)$

$$0 = \beta_c(N_0 - N_c) - \frac{N_0 + N_c}{\tau}, \qquad (2.26.21)$$

adică

$$\beta_c = \frac{N_0 + N_c}{N_0 - N_c}\,\frac{1}{\tau}. \qquad (2.26.22)$$

Pierderile interne γ_i fiind mici, $N_c \ll N_0$ şi

$$\beta_c \approx \frac{1}{\tau}. \tag{2.26.23}$$

Atunci, ecuaţia (2.26.20) poate fi pusă sub forma

$$N_i = N_0 \frac{\dfrac{\beta}{\beta_c} - 1}{\dfrac{\beta}{\beta_c} + 1} \tag{2.26.24}$$

Deci, cunoscînd puterea (sau energia) de pompaj actuală şi puterea (sau energia) de pompaj de prag se poate evalua N_i.

Pentru $t > 0$ (cazul întrerupătorului deschis), neglijînd termenii de pompaj şi de dezintegrare spontană din (2.26.18), rezultă

$$\frac{dN}{dt} = -2Bn_tN \tag{2.26.25}$$

$$\frac{dn_t}{dt} = \left(V_zBN - \frac{1}{\tau_c}\right)n_t. \tag{2.26.26}$$

Ecuaţiile (2.26.25) şi (2.26.26) se pot rezolva ţinînd seama de condiţiile iniţiale ($t = 0$)

$$N(t = 0) = N_i \quad \text{şi} \quad n_t(t = 0) = n_i$$

Dacă în (2.26.26) punem $\frac{dn_t}{dt} = 0$, obţinem

$$V_aBN_p - \frac{1}{\tau_c} = 0$$

adică, ţinînd seama de (2.26.14) şi (2.26.15)

$$N_p = \frac{1}{V_zB\tau_c} = \frac{lV_z}{cdV_z}\frac{\gamma_e}{l} = \frac{\gamma}{\sigma d} \tag{2.26.27}$$

N_p fiind inversia de populaţie de prag.

Introducînd mărimile adimensionale

$$\eta = \frac{N}{N_p} \tag{2.26.28}$$

$$\varphi = \frac{n_t}{N_p V_z} \tag{2.26.29}$$

si

$$\theta = \frac{t}{\sigma c} \tag{2.26.30}$$

se obţin următoarele ecuaţii, care descriu regimul «Q-swiched»

$$\frac{d\eta}{d\theta} = -2\varphi\eta \tag{2.26.31}$$

şi

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = (\eta - 1)\,\varphi. \tag{2.26.32}$$

Este clar că soluţia sistemului (2.26.31) — (2.26.32) este de forma

$$\eta = \eta(\eta_i,\ \theta) \tag{2.26.33}$$

şi

$$\varphi = \varphi(\eta_i,\ \theta) \tag{2.26.34}$$

deoarece pentru $\theta = 0$, $\eta = \eta_i = \frac{N_i}{N_p}$.

Făcînd raportul ecuaţiilor (2.26.31) şi (2.26.32)

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) \tag{2.26.35}$$

şi integrînd, obţinem

$$\varphi - \varphi_i = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\eta}{\eta_i}\right) - (\eta - \eta_i)\right]. \tag{2.26.36}$$

Pentru maximul pulsului ($\eta_p = 1$), neglijînd pe φ_i, obținem

$$\varphi_p = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{N_i}{N_p}\right) - 1 - \ln\left(\frac{N_i}{N_p}\right)\right]. \qquad (2.26.37)$$

c) Puterea de ieșire $\mathscr{P}_e$ este egală cu suma puterilor de ieșire prin ambele oglinzi

$$\mathscr{P}_e = \varphi \frac{\hbar\omega}{\tau_u}, \qquad (2.26.38)$$

iar puterea de ieșire prin una din extremitățile cavității va fi

$$\mathscr{P}_e = \mathscr{P}_e \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}. \qquad (2.26.39)$$

Puterea de vîrf va fi

$$\mathscr{P}_p = n_p \frac{\hbar\omega}{\tau_u} = N_p V_z \varphi_p \frac{\hbar\omega}{\frac{l}{\gamma_u c}} = \gamma\gamma_u \frac{V_z}{\sigma d}\left(\hbar\omega \frac{c}{l}\right)\varphi_p \qquad (2.26.40)$$

deoarece $N_p = \frac{\gamma}{\sigma d}$ și $\tau_u = \frac{l}{\gamma_u c}$ și n_p este numărul de fotoni la „prag”. Energia totală de ieșire, va fi

$$\mathscr{E}_e = N \frac{\omega}{\tau_u} \int_{-\infty}^{+\infty} n_t \, dt = \frac{\gamma_u}{\gamma} \hbar\, \omega N_p V_z \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi d\theta. \qquad (2.26.41)$$

Deoarece $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$, avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi dt = \frac{1}{2}(\eta_i - \eta_f). \qquad (2.26.42)$$

Astfel, (2.26.41) devine

$$\mathscr{E}_e = \frac{\gamma_u}{\gamma} N\omega V_z \frac{N_i - N_f}{2}. \qquad (2.26.43)$$

Ținînd seama de faptul că $\varphi(\infty) = 0$ și neglijînd pe φ_i din (2.26.36), obținem

$$\frac{N_i - N_f}{N_i} = \frac{N_p}{N_i} \ln\left(\frac{N_i}{N_f}\right). \qquad (2.26.44)$$

2°. Din datele problemei, obținem

$$\gamma_i = -\ln(1 - T_i) = -\ln(0{,}95) = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$$

$$\gamma_2 = -\ln(1 - \mathscr{T}_2) = -\ln 1 = 0$$

$$\gamma_1 = -\ln(1 - \mathscr{T}_1) = -\ln 0{,}5 = 0{,}7.$$

Pierderile medii totale prin oglinzile cu factorii de transmisie $\mathscr{T}_1$ și $\mathscr{T}_2$, vor fi

$$\gamma_u = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0{,}35.$$

Pierderile totale vor fi

$$\gamma = \gamma_i + \gamma_u = 0{,}399 \approx 0{,}4.$$

Volumul modului în materialul activ va fi

$$V_z = \pi W_0^2 d = 5{,}9 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^3.$$

Pentru 0,05% ioni de Cr^{3+} în rețeaua cristalină, avem

$$N_0 = 1{,}6 \cdot 10^{25}\ \text{ioni de } Cr^{3+} \cdot \mathrm{m}^{-3}$$

$$\tau = 3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}$$

și

$$\hbar\omega = 2{,}8 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Laserul cu rubin fiind un laser cu trei nivele energetice, funcționarea acestuia va fi guvernată de ecuațiile ratelor

$$N_1 + N_2 = N_0$$

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \beta N_1 - B n_t N_2 - \frac{N_2}{\tau}$$

$$\frac{\mathrm{d}n_t}{\mathrm{d}t} = \left(V_z B N_2 - \frac{1}{\tau_c}\right) n_t.$$

Dacă

$$N = N_2 - N_1 \approx N_2$$

avem

$$\frac{dN}{dt} = \beta(N_0 - N) - Bn_t N_2 - \frac{N}{\tau}$$

$$\frac{dn_t}{dt} = \left(V_z BN - \frac{1}{\tau_c} \right) n_t$$

B fiind o constantă dată de

$$B = \frac{\sigma_c d}{l V_z} = \frac{\sigma_c}{V}.$$

Deoarece avem un laser cu trei nivele

$$\frac{\beta}{\beta_c} = 2.$$

Astfel:

$$N_i = N_0 \frac{\beta\tau - 1}{\beta\tau + 1} = N_0 \frac{\frac{\beta}{\beta_c} - 1}{\frac{\beta}{\beta_c} + 1} = 1{,}6 \cdot 10^{25} \; \frac{2 - 1}{2 + 1} = 0{,}53 \cdot 10^{25}\, \mathrm{m}^{-3}$$

$$N_p = \frac{1}{V_a B \tau_c} = \frac{\gamma}{\sigma d} = \frac{0{,}4}{2{,}5 \cdot 10^{-24} \cdot 0{,}075} = 2{,}13 \cdot 10^{24} \; \mathrm{m}^{-3}.$$

$$\frac{n_i}{n_p} = \frac{0{,}53 \cdot 10^{25}}{2{,}31 \cdot 10^{24}} \approx 2{,}5.$$

Din figura 2.26R, a rezultă: $\varphi(p) = 0{,}3$.

Din figura 2.26R, b, care ne dă timpul de creștere a pulsului t_r (normalizat la timpul de dezintegrare a fotonilor din cavitate) în funcție de $\frac{N_p}{N_i}$, rezultă

$$t_r = 1{,}5.$$

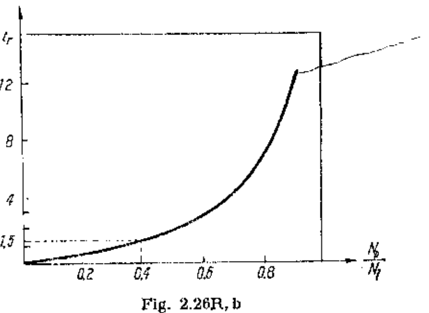


Fig. 2.26R, a

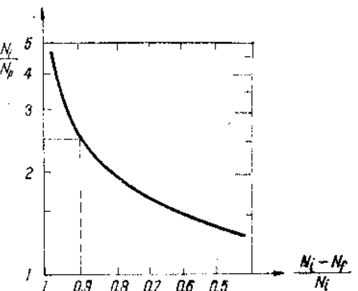


Fig. 2.26R, b

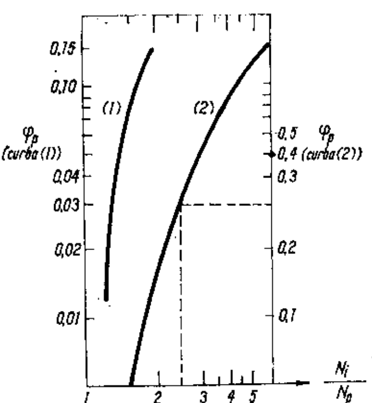


Fig. 2.26 R, c

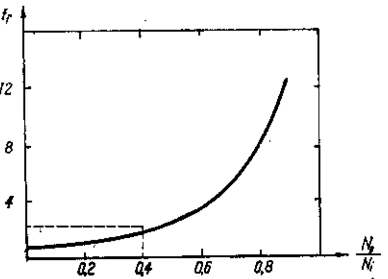


Fig. 2.26R, d

Din figura 2.26R, c, care reprezintă timpul de scădere a pulsului t_f (normalizat la timpul de dezintegrare a fotonilor din cavitate) în funcție de $\frac{N_p}{N_i}$, rezultă $t_f^* = 1{,}83$. Din figura 2.26.R, d, care reprezintă raportul $\frac{N_i}{N_p}$ funcție de factorul de utilizare a energiei $\frac{N_i - N_f}{N_i}$ rezultă

$$\frac{N_i - N_f}{N_i} = 0{,}9.$$

Deoarece $\tau_c = \frac{l}{\gamma c} = 4{,}15 \cdot 10^{-9}$ s rezultă $t_r = 6{,}2 \cdot 10^{-9}$ s și $t_f = 7{,}6 \cdot 10^{-9}$ s.

Din relațiile (2.26.39) și (2.26.40) rezultă

$$\mathscr{P}_{p_1} = \mathscr{P}_p = 2{,}2 \text{ MW}.$$

Energia de ieșire va fi

$$\mathscr{E}_e = \frac{\gamma u}{\gamma} \frac{N \omega V_z N_i}{2} \frac{N_i - N_f}{N_i} = 36 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

Deci, la ieșire vom avea un puls cu puterea de vîrf de 2,2 MW și durata $\Delta t \approx 14 \cdot 10^{-9}$ s.

2.27. 1°. Avînd Z moduri, cîmpul electric total $E(t)$ poate fi scris ca suprapunerea cîmpurilor electrice $E_j(t)$ ale modurilor singulare

$$E(t) = \sum_{j=1}^{Z} E_j(t). \tag{2.27.1}$$

Fazele cîmpurilor fiind necorelate, avem

$$\langle E_j \cdot E_{j'} \rangle = 0, \text{ pentru } j \neq j' \tag{2.27.2}$$

deoarece

$$E_j = E_0 \exp [i \varphi n]. \tag{2.27.3}$$

Intensitatea totală a radiației (pulsului gigant) este

$$I = \langle |E(t)|^2 \rangle = \sum_j I_j(t) \qquad (2.27.4)$$

unde

$$I_j = |E_j|^2 \qquad (2.27.5)$$

este intensitatea unui singur mod.

În cazul a Z moduri de intensitate egală, avem

$$|E_j|^2 \approx |E_0|^2. \qquad (2.27.6)$$

Intensitatea totală a pulsului gigant va fi

$$I = Z|E_0|^2 = ZI_0. \qquad (2.27.7)$$

2°. Intensitatea cimpului electric total al celor Z moduri sincronizate în fază, presupunînd moduri de amplitudini egale, $E_0 \exp [i(\omega + j\omega_0)t]$ este

$$E_s(t) = \sum_j E_0 \exp [i(\omega + j\omega_0)t] \qquad (2.27.8)$$

unde însumarea are loc, pentru ușurarea calculelor, de la $j = -\frac{Z-1}{2}$ la $j = \frac{Z+1}{2}$, adică

$$E_s(t) = \sum_{\frac{Z-1}{2}}^{\frac{Z+1}{2}} E_0 \exp[i(\omega + j\omega_0)t] = E_0 \exp[i\omega t] \frac{\sin \frac{Z}{2}\omega_0 t}{\sin \frac{\omega_0}{2} t}. \qquad (2.27.9)$$

Intensitatea totală va fi

$$J_s(t) = E_s^*(t)\, E_s(t) = E_0^2 \frac{\sin^2 \frac{Z}{2}\omega_0 t}{\sin^2 \frac{\omega_0}{2} t}. \qquad (2.27.10)$$

Se observă că maximele se obțin pentru

$$t = m\frac{2\pi}{\omega_0}; \ m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.27.11)$$

Intensitatea de vîrf („piscul" intensității) este dată de expresia

$$I_{s_M} = E_0^2 Z^2 = ZI. \tag{2.27.12}$$

Intensitatea pulsurilor gigant, obținute pe această cale, se anulează pentru

$$t = \frac{2\pi m}{\omega_0 Z}. \tag{2.27.13}$$

Lărgimea pulsurilor este egală cu intervalul dintre două minime adică

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 Z}. \tag{2.27.14}$$

2.28. 1°. Fie N_1 și N_2 populațiile nivelelor absorbantului pe unitatea de volum și n numărul inițial de fotoni pe unitatea de arie. Dacă W și w sînt ratele de emisie indusă, respectiv spontană, pentru mediul absorbant, se pot scrie ecuațiile

$$\frac{dN_1}{dt} = W(N_2 - N_1) + wN_2 \tag{2.28.1}$$

$$N_1 + N_2 = N_0 \tag{2.28.2}$$

$$-\frac{dn}{dx} = W(N_1 - N_2). \tag{2.28.3}$$

Ultima ecuație exprimă scăderea numărului de fotoni în interiorul celulei absorbante, pe unitatea de volum. Dacă $N_1(0) = N_0$ este densitatea de molecule absorbante, se obține prin integrare numărul de fotoni pe unitatea de arie, absorbiți în grosimea L_a, la o traversare

$$\frac{n_a}{L_a} = \frac{N_0\sigma_a n w T}{2\sigma_a n + wT} + \frac{2N_0(\sigma_a n)^2}{(2\sigma_a n + wT)^2}\{1 - \exp[-(2\sigma_a n + wT)]\} \tag{2.28.4}$$

în care: T este durata pulsului laser, presupus de intensitate constantă în intervalul $0 < t < T$; σ_a — secțiunea de absorbție per moleculă de absorbant. S-a folosit egalitatea $\sigma_a n = WT$.

Deoarece derivata $\partial n_a / \partial T$ rămîne mereu pozitivă, n_a este funcție crescătoare de T. Cu alte cuvinte, sînt favorizate (mai puțin absorbite) pulsurile foarte scurte. Durata minimă a pulsurilor este limitată de banda de amplificare a mediului activ, notată cu $\Delta\omega$. Într-adevăr, pulsurile mai scurte decît $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, conțin frecvențe care ies din banda de amplificare, deci care nu sînt amplificate; astfel de pulsuri nu există. Ieșirea laserului se prezintă sub forma unor pulsuri de durată $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, separate prin durata $\frac{2L}{c}$ (timpul necesar unui puls pentru parcurgerea dus-întors a cavității de lungime L). La aceeași concluzie se ajunge punînd condiția sincronizării modurilor. Deci absorbantul saturabil determină un astfel de efect.

2°. Dacă se poate dezvolta în serie ecuația (2.28.4), se ajunge la relația

$$n_a = N_0 L_a \sigma_a n \left[1 - \sigma_a n \left(1 - \frac{wT}{3}\right) + \frac{2}{3} (\sigma_a n)^2 (1 - wT) + \dots\right]. \tag{2.28.5}$$

În regim staționar, cîștigul în mediul activ este egal cu pierderile din cavitate, adunate cu cele din absorbant.

Fie N inversia de populație din mediul activ și σ_{exc} secțiunea eficace de excitare a ionilor mediului activ. Mediul activ de lungime L (presupusă, pentru simplificare, egală cu cea a cavității) contribuie cu $LN\sigma_{exc}\, n$ la un puls inițial de n fotoni. În lipsa saturației, condiția de staționaritate se scrie

$$LN \sigma_{exc} n = \gamma n + N_0 L_a \sigma_a n \left[1 - \sigma_a n \left(1 - \frac{wT}{3}\right)\right]$$

unde γ este coeficientul de pierderi în cavitate. Rezultă

$$\frac{wT}{3} = 1 - \frac{L_a N_a \sigma_a + \gamma - LN\sigma_{exc}}{\sigma_a n}. \tag{2.28.6}$$

La numărătorul fracției dim membrul drept este cîștigul net, iar la numitor gradul de saturare. Se obține

$$T \approx \frac{1}{w} = 2 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s}.$$

3°. Cele două pulsuri, care pot apărea în cavitate, întîlnindu-se la celulă formează o undă staționară de amplitudine mai mare și deci de absorbție relativă mai mică. Totuși, deoarece în fiecare perioadă, fiecare puls trece prin cavitate o dată fără să interfere cu celălalt, absorbția totală crește. Numărul de fotoni absorbiți pe unitatea de arie cuprinde cîte o trecere a fiecărui puls singur și o medie spațială a figurii de interferență obținute prin trecerea ambelor pulsuri. Dacă cele două pulsuri au cîte $\frac{n_a}{2}$ fotoni, numărul total de fotoni absorbiți este

$$n_s' = 2N_a L_a \sigma_a n \left[1 - \sigma_a n \left(1 - \frac{wT}{3}\right) + \frac{1}{2} (\sigma_a n)^2 (1 - wT) + \dots\right]. \tag{2.28.7}$$

Factorul 2 din fața parantezei apare din considerarea absorbției pe o perioadă. Comparînd relațiile (2.28.7) și (2.28.5) (amplificată cu 2, pentru a exprima două treceri), se observă că, în primă aproximație, în cavitate pot exista atît un puls cît și două pulsuri simultane. O analiză mai aprofundată arată că prima situație este ușor favorizată.

Dacă apar două familii de pulsuri, acestea sînt separate de durata $\frac{2d}{c}$ (d este distanța dintre absorbant și fereastra de ieșire a laserului). În particular, dacă celula este așezată la mijlocul cavității, între pulsuri există durata $\frac{L}{c}$, de două ori mai mică decît cea din cazul unui singur puls în cavitate.

2.29. Descriem funcționarea unui laser multimodal cu mediu activ solid prin sistemul de ecuații cuplate

$$i\left(\dot{A}_\lambda + \frac{\gamma_1}{2} A_\lambda\right) - w_{c\lambda} A_\lambda = \int B(x)\, P(x, t)\, dx \tag{2.29.1}$$

$$i\left(\dot{P} + \frac{\Delta\omega}{2} P\right) - \Omega_0 P = - \sum_{\lambda'} A_{\lambda'} N_- B_{\lambda'}(x) \tag{2.29.2}$$

$$\dot{N}_- + \gamma_+ N_- - \gamma_- N_0 = -2i \sum_{\lambda'} B_{\lambda'}(x) (A_{\lambda'} r^* - A_{\lambda'}^* r) \tag{2.29.3}$$

unde A_λ este componenta λ a dezvoltării cîmpului după funcțiile proprii Φ_λ ale rezonatorului, $\omega_{c\lambda}$ — frecvențele proprii ale rezo-

natorului, Ω_0 — frecvența liniei radiației substanței, P — polarizația variabilă, N_0 — densitatea de particule active, N_- — inversia de populație, $\gamma_- = w_0 - \frac{1}{\tau}$, $\gamma_+ = w_0 + \frac{1}{\tau}$, γ_1 — rata de pierdere a energiei cîmpului din rezonator, $\Delta\omega$ — semilărgimea liniei radiației dată de substanță, w_0 — rata de formare a atomilor excitați pentru calculul iluminării, $\frac{1}{\tau}$ — probabilitatea de emisie spontană a radiației, $B_\lambda(x) = P_\lambda \Phi_\lambda(x)$, $P_\lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega_\lambda}}\, \overline{\mu^e}(x)\cdot \overline{e_\lambda}$, $\overline{\mu^e}(x)$ — momentul de dipol electric al unității de volum, $\overline{e_\lambda}$—versorul polarizării.

Dezvoltînd în (2.29.1) — (2.29.3) pe P după funcțiile proprii ale rezonatorului

$$P = \sum_\lambda y_\lambda(t)\cdot \Phi_\lambda(x)$$

integrînd în tot volumul rezonatorului, ținînd cont de condiția de normare $\int \Phi_\lambda \Phi_{\lambda'}\, \mathrm{d}x = \delta_{\lambda\lambda'}$ și introducînd funcțiile

$$N_\lambda = 2i\exp[t-\gamma]\int \exp[\gamma + t_1] P_\lambda (A_\lambda y_\lambda^* - A_\lambda^* y_\lambda)\mathrm{d}t_1 \qquad (2.29.4)$$

și

$$N_{\lambda\lambda'} = 2i\exp[t-\gamma]\int \exp[\gamma+t_1][P_\lambda(A_\lambda y_{\lambda'}^* - A_\lambda^* y_{\lambda'}) + P_{\lambda'}(A_{\lambda'} y_\lambda^* - A_{\lambda'}^* y_\lambda)]\mathrm{d}t_1 \qquad (2.29.5)$$

obținem următorul sistem de ecuații

$$i\left(\dot{A}_\lambda + \frac{\gamma_1}{2} A_\lambda\right) - w_{c\lambda} A_\lambda = P' y_\lambda \qquad (2.29.6)$$

$$i\left(\dot{y}_\lambda + \frac{\gamma_2}{2} y_\lambda\right) - \Omega y_\lambda = -\sum_n P' A_n \left(\delta_{\lambda n} N^0 - \sum_k \mu_{\lambda n k k} N_k - \right.$$

$$\left. - \sum_{\lambda'' > \lambda'''} \mu_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} N_{\lambda''\lambda'''}\right). \qquad (2.29.7)$$

$$\dot{N}_\lambda + \gamma_+ N_\lambda = 2iP'(A_\lambda y_\lambda^* - A_\lambda^* y_\lambda) \qquad (2.29.8)$$

$$\dot{N}_{\lambda\lambda'} + \gamma_+ N_{\lambda\lambda'} = 2iP[(A_\lambda y_{\lambda'}^* - A_\lambda^* y_\lambda') + (A_{\lambda'} y_\lambda^* - A_{\lambda'}^* y_\lambda)] \qquad (2.29.9)$$

unde

$$N^0 = \frac{\gamma - n_0}{\gamma_+}$$

$$\mu_{\lambda\lambda'\lambda''\lambda'''} = \int \Phi_\lambda \Phi_{\lambda'} \Phi_{\lambda''} \Phi_{\lambda'''} \, dx$$

$$P' = \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega_0}} \cdot |\langle \bar{\mu}^\varepsilon \rangle|$$

şi unde $|\langle \bar{\mu}^\varepsilon \rangle|$ este valoarea medie a momentului de dipol electric din unitatea de volum a rezonatorului.

Folosim sistemul de ecuaţii (2.29.6) — (2.29.9) pentru descrierea regimului de funcţionare a laserului, în care sînt excitate trei perechi de moduri, a căror funcţii au forma

$$\Phi_{rsq} = (\sqrt{2})^3 \sin \frac{\pi r}{L_1} x_1 \sin \frac{\pi s}{L_2} x_2 \sin \frac{\pi q}{L_3} x_3 \qquad (2.29.10)$$

unde: $q = q_1, q_2, q_3$ (inidicii axiali vecini); $s = s_1, s_2$ şi L_1, L_2, L_3 — dimensiunile mediului activ.

Introducem notaţia $\omega_{m l_{iqk}} = \omega_{ik}$, unde $i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$.

Frecvenţele proprii ω_{ik} ale fiecărei perechi de moduri, ce au aceiaşi indici axiali, le putem considera „apropiate", adică avînd curbe de rezonanţă ce se intersectează.

Presupunem că intensităţile tuturor modurilor sînt aceleaşi, că modurile axiale sînt echidistante şi că intervalele de frecvenţă dintre modurile din fiecare pereche de moduri apropiate sînt egale:

$$\omega_{1k} = \omega_{2k} = \delta.$$

Soluţia lui A_λ se poate scrie sub forma

$$A_\lambda = a_\lambda \exp\left[-i(\Omega_\lambda t - \varphi_\lambda)\right] \quad (\lambda = 1, 2, \ldots 6). \quad (2.29.11)$$

Atunci

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \frac{1}{2}(w_{11} + w_{21})$$

$$\Omega_3 = \Omega_4 = \frac{1}{2}(w_{12} + w_{22})$$

$$\Omega_5 = \Omega_1 = \frac{1}{2}(w_{13} + w_{23}).$$

În regimul de autosincronizare, fazele modurilor sînt supuse la următoarele condiții

$$\varphi_1 + \varphi_6 - \varphi_3 - \varphi_4 = k\pi$$

$$\varphi_2 + \varphi_5 - \varphi_3 - \varphi_4 = n\pi$$

și sistemul de ecuații (2.30.6) — (2.30.9) capătă forma

$$\dot{a} = -\frac{\gamma_1}{2} a + \frac{\beta}{2} a (1 - \nu\theta_1 - \mu\theta_{12} \cos \varphi_{12}) \qquad (2.29.12)$$

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_+ \theta_1 + 2\beta I(1 - \nu\theta_1 - \mu\theta_{12} \cos \varphi_{12}) \qquad (2.29.13)$$

$$\dot{\theta}_{12} = -\gamma_+ \theta_{12} - 4\beta - I[\mu\theta_{12} - (1 - \nu\theta_1) \cos \varphi_{12})] \qquad (2.29.14)$$

$$\dot{\varphi}_{12} = -\delta + \beta\mu\theta_{12} \sin \varphi_{12} \qquad (2.29.15)$$

unde

$$\beta = \alpha N^0, \ \theta_{12} = \frac{N_{12}}{N^0}$$

$$\alpha = \frac{4P^2}{\gamma_2}, \quad I = \frac{a^2}{N^0}$$

$$\theta_1 = \frac{N_1}{N^0}, \quad \varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Studiind sistemul de ecuații (2.29.12) — (2.29.15) într-o stare staționară, rădăcina ecuației caracteristice este

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[-\Gamma\mu + \left(\frac{\gamma}{4\mu I_0}\Gamma\mu + \frac{\gamma\gamma_+}{2I_0(\nu - 2\mu)}\right)\left(\frac{\delta}{\gamma_1}\right)^2\right] \pm i\omega_r \sqrt{\frac{2\mu}{\nu}} \qquad (2.29.16)$$

unde

$$\Gamma\mu = \gamma_+ + 4\beta\mu I_0, \ \gamma = \frac{\gamma_1}{\beta}, \ \nu = \mu_{1111} + 3\mu_{1122} + 2\mu_{1234},$$

$$\mu = \mu_{1122} + 2\mu_{1234};$$

I_0 — valoarea staționară a intensității radiației induse.

În cazul îndeplinirii condiției

$$\left(\frac{\delta}{\gamma_1}\right)^2 \left(\frac{\bar{\gamma}}{4\mu I_0}\Gamma\mu + \frac{\bar{\gamma}\gamma_+}{2I_0(\nu - 2\mu)}\right) > \Gamma\mu \qquad (2.29.17)$$

pentru suma amplitudinilor cîmpurilor $a(t)$ obținem

$$a(t) = a_0(t)\,\frac{2\sin\frac{3\Delta t}{2}\cos\frac{\Delta t}{2}}{\sin\Delta t}\exp\left[i\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\right] \qquad (2.29.18)$$

unde

$$a_0(t) \approx \sqrt{2}\,a_0\left(1 + \frac{y_1}{2y_0} - \frac{\varphi'}{2}\right)$$

$$a_0 = \sqrt{y_0}\,;\;\; y_1 \sim \exp\,(i\omega)\,;\;\; \varphi' \sim \exp\,(i\omega)$$

$$\omega = \omega_k\sqrt{\frac{2\mu}{\nu}}\,;\; y_1 \ll y_0\,;\; \varphi' \ll \varphi_{12}^0$$

și unde a_0, φ_{12}^0 sînt valorile staționare ale mărimilor sistemului de ecuații (2.29.12) — (2.29.15).

Astfel, radiația luminoasă indusă cu frecvența ω_0 apare ca modulată în înaltă frecvență cu o frecvență ω_m egală cu distanța dintre modurile axiale sincronizate și de asemenea în joasă frecvență cu o frecvență ω apropiată de frecvența cinetică ω_k $\left(\omega = \omega_k\sqrt{\frac{2\mu}{\nu}}\right)$, care explică interacția dintre modurile ce au aceiași indici axiali, indici transversali diferiți și se află distanțate cu un interval de frecvențe $\delta \ll \omega_m$.

În cazul a trei moduri axiale ce se deosebesc doar prin unul din indicii transversali ($\delta \to 0, \varphi_{12} \to 0$), din ecuația (2.29.18) obținem

$$a(t) = a_0\,\frac{2\sin\frac{3}{2}\omega_m t\cdot\cos\frac{\omega_m t}{2}}{\sin\omega_m t}\exp\,[i(\omega t + \varphi_0)] \qquad (2.29.19)$$

unde φ_0 este faza modului central, sau

$$\operatorname{Re} a(t) = a_0 \cdot \frac{2 \sin \frac{3}{2} \omega_m t \cos \frac{\omega_m t}{2}}{\sin \omega_m t} \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (2.29.20)$$

3.1. Pentru a găsi modul de variație în timp a mărimilor N_{norm} și φ_{norm}, față de valorile de regim staționar, considerăm întîi acest regim de funcționare. Cu condițiile $\dot{N}_{norm} = 0$ și $\dot{\varphi}_{norm} = 0$, ecuațiile ratelor devin

$$\frac{N_{norm} - N^e_{norm}}{T_1} = \frac{1 - N^e_{norm}}{T_1} N_{norm} \varphi_{norm} \qquad (3.1.1)$$

$$\frac{\varphi_{norm}}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_c} N_{norm} \varphi_{norm}. \qquad (3.1.2)$$

Ecuațiile (3.1.1) și (3.1.2) admit două sisteme de soluții

$$\begin{cases} N_{norm} = 1 \\ \varphi_{norm} = 1 \end{cases} \qquad (3.1.3)$$

$$\begin{cases} N_{norm} = N^e_{norm} \\ \varphi_{norm} = 0. \end{cases} \qquad (3.1.4)$$

Regimul stabil de funcționare este caracterizat însă numai de soluțiile (3.1.3) care corespund unei densități de energie diferite de zero.

Se aplică sistemului o mică perturbație exterioară care strică echilibrul. Realizarea unui nou echilibru implică $N^e_{norm} > 1$ (condiția de prag) pentru soluțiile (3.1.3) și $N^e_{norm} < 1$ pentru soluțiile (3.1.4). Se consideră că regimul tranzitoriu începe odată cu realizarea condiției de prag

$$N^e_{norm} = 1 \qquad (3.1.5)$$

moment în care densitatea de energie e mult mai mică decît unitatea

$$\varphi_{norm} \ll 1. \qquad (3.1.6)$$

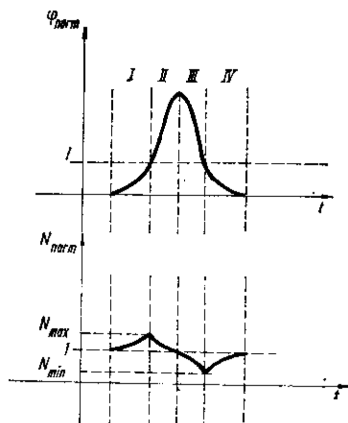


Fig. 3.1.R,a

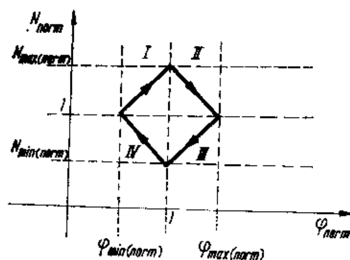


Fig. 3.1.R,b

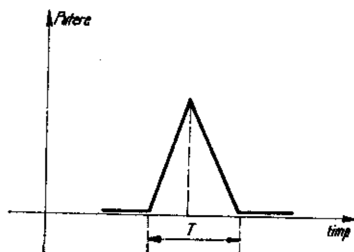


Fig. 3.1.R,c

Variațiile în timp ale lui N_{norm} și φ_{norm} au patru etape distincte (fig. 3.1R, a).

a) Pornim de la ecuația

$$\dot{N}_{norm} + \frac{N_{norm} - N^e_{norm}}{T_1} = \frac{1 - N^e_{norm}}{T_1}\,\varphi_{norm} N_{norm} \qquad (3.1.7)$$

și ținînd seama de (3.1.6) se obține

$$\dot{N}_{norm} + \frac{N_{norm} - N^e_{norm}}{T_1} = 0.$$

Deoarece $N^e_{norm} = 2$ (peste prag)

$$\frac{dN_{norm}}{dt} = \frac{N^e_{norm} - N_{norm}}{T_1} = \frac{N_{norm}\left(\dfrac{N^e_{norm}}{N_{norm}} - 1\right)}{T_1} = \frac{N_{norm}\,K}{T_1} >.1$$

(am persupus variațiile lui N_{norm} față de regimul staționar neglijabile), conform cu punctul 2° al problemei, rezultă

$$\frac{dN_{norm}}{dt} = \frac{K}{T_1}\,dt$$

$$N_{norm} = C_1 \exp\left[\frac{K}{T_1}\,t\right] \qquad (3.1.8)$$

(unde C_1 este o constantă).

Deci diferența de populație crește exponențial în timp. Constanta de integrare este aproximativ egală cu unitatea deoarece am presupus că e îndeplinită condiția de prag.

Din ecuația

$$\dot{\varphi}_{norm} + \frac{\varphi_{norm}}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_c}\,N_{norm}\,\varphi_{norm} \qquad (3.1.9)$$

ținînd seama de (3.1.8) rezultă

$$\dot{\varphi}_{norm} = \frac{\varphi_{norm}}{\tau_c}(N_{norm} - 1) = \frac{\varphi_{norm}}{\tau_c}\left(\exp\left[\frac{K}{T_1}t\right] - 1\right)$$

$$\frac{d\varphi_{norm}}{\varphi_{norm}} = \frac{\exp\left[\frac{K}{T_1}t\right] - 1}{\tau_c}\,dt$$

$$\ln\varphi_{norm} = \frac{1}{\tau_c}\left(\frac{T_1}{K}\exp\left[\frac{K}{T_1}t\right] - t\right) + C_2$$

$$\varphi_{norm} = C_2\exp\left[\frac{1}{\tau_c}\;\frac{T_1}{K}\exp\left[\frac{K}{T_1}t\right] - 1\right]\cdot t. \qquad (3.1.10)$$

Deoarece expresia din paranteză este mai mare ca zero, rezultă pentru φ o creștere exponențială.

b) În momentul în care φ_{norm} devine mai mare decît unitatea, cu condiția $N_{norm} \approx 1$, expresia (3.1.7) devine

$$\dot{N}_{norm} = \frac{1 - N^e_{norm}}{T_1}(\varphi_{norm} - 1) < 1 \qquad (3.1.11)$$

deoarece $N^e_{norm} > 1$.

Are loc o scădere exponențială a lui $\dot{N}_{norm}$ care rezultă din integrarea ecuației (3.1.11). Atît timp cît $N_{norm} > 1$, φ_{norm} continuă să crească, atingînd maximul pentru $N = 1$.

c) Atunci cînd N_{norm} devine mai mic decît unitatea, începe să scadă și φ_{norm}, după cum rezultă din ecuația (3.1.9)

$$\frac{d\varphi_{norm}}{dt} = \frac{\varphi_{norm}}{\tau_c}(N_{norm} - 1) < 0. \qquad (3.1.12)$$

d) În scădere φ_{norm} ajunge subunitar și N_{norm} începe să crească exponențial, atingînd valoarea de regim staționar cînd φ_{norm} devine foarte mic.

În continuare procesul se repetă dar valorile maxime scad tinzînd spre regimul staționar.

2°. Ecuațiile (3.1.7) și (3.1.8) se mai scriu:

$$\frac{\mathrm{d}N_{norm}}{\mathrm{d}t} + \frac{N_{norm}}{T_1}(\varphi_{norm} - 1) = \frac{N^e_{norm}}{T_1}(N_{norm}\,\varphi_{norm} - 1) \quad (3.1.13)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{norm}}{\mathrm{d}t} = \frac{\varphi_{norm}}{\tau_c}(N_{norm} - 1). \quad (3.1.14)$$

Raportînd (3.1.14) la (3.1.13) se obține

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{norm}}{\mathrm{d}N_{norm}} = \frac{\dfrac{\varphi_{norm}}{\tau_c}(N_{norm} - 1)}{\dfrac{N_{norm}}{\tau_c}(\varphi_{norm} - 1) - \dfrac{N^e_{norm}}{T_1}(N_{norm}\,\varphi_{norm} - 1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{norm}}{\mathrm{d}N_{norm}} = \frac{T_1}{\tau_c}\,\frac{(N_{norm} - 1)\,\varphi_{norm}}{N_{norm}(\varphi_{norm} - 1) - N^e_{norm}(N_{norm}\,\varphi_{norm} - 1)}. \quad (3.1.15)$$

Ținînd seama că abaterile lui N_{norm} de la regim staționar sînt neglijabile (3.1.15) devine

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{norm}}{\mathrm{d}N_{norm}} = \frac{T_1(N_{norm} - 1)\,\varphi_{norm}}{\tau_c(1 - N^e_{norm}\,(\varphi_{norm} - 1)}. \quad (3.1.16)$$

Expresia (3.1.16) se poate integra prin separarea variabilelor

$$\frac{\varphi_{norm} - 1}{\varphi_{norm}}\,d\,\varphi_{norm} = \frac{T_1(N_{norm} - 1)}{(1 - N^e_{norm})}\,\mathrm{d}N_{norm}$$

$$\varphi_{norm} - \ln\,\varphi_{norm} = \frac{T_1(N_{norm} - 1)^2}{2\tau_c(1 - N^e_{norm})} + \mathrm{Ct}. \quad (3.1.17)$$

Considerind condițiile inițiale, corespunzătoare începutului regimului tranzitoriu: $N_{norm} = 1$, $\varphi_{norm} = \varphi_{i(norm)} \ll 1$, rezultă

$$\varphi_{i(norm)} - \ln\,\varphi_{i(norm)} = \mathrm{Ct}.$$

Expresia (3.1.17) devine

$$\frac{T_1}{2\tau_c(N^c_{norm}-1)}(N_{norm}-1)^2 = \ln\left[\frac{\varphi_{norm}}{\varphi_{i(norm)}} - (\varphi_{norm}-\varphi_{i(norm)})\right]. \quad (3.1.18)$$

Analizînd expresia (3.1.18), se observă că pentru $N_{norm} = 1$, ecuația $\ln \frac{\varphi_{norm}}{\varphi_{i(norm)}} - (\varphi_{norm} - \varphi_{i(norm)}) = 0$ admite două soluții

$$\varphi_{1(norm)} = \varphi_{i(norm)} \quad (3.1.19)$$

și

$$\ln \frac{\varphi_{2(norm)}}{\varphi_{i(norm)}} = \varphi_{2(norm)} - \varphi_{i(norm)}. \quad (3.1.20)$$

Deoarece $\varphi_{2(norm)} > \varphi_{i(norm)}$, a fost obținută tot în condiția $N_{norm} = 1$, vom nota

$$\varphi_{2(norm)} = \varphi_{max(norm)} \text{ și}$$

$$\varphi_{i(norm)} = \varphi_{min(norm)}$$

Pentru $\varphi_{max(norm)} \gg \varphi_{min(norm)}$, $\varphi_{max(norm)}$ va fi dat de ecuația

$$\varphi_{max(norm)} = \ln \frac{\varphi_{max(norm)}}{\varphi_{min(norm)}}. \quad (3.1.21)$$

Pentru $\varphi_{norm} = 1$, din (3.1.18) se obțin două valori și pentru N_{norm}

$$N_{max(norm)} = 1 + \sqrt{\frac{2\tau_c(N^c_{norm}-1)}{T_1}\left[-1 - \ln \varphi_{min(norm)}\right]} \quad (3.1.22)$$

$$N_{min(norm)} = 1 - \sqrt{\frac{2\tau_c(N^c_{norm}-1)}{T_1}\left[-1 - \ln \varphi_{min(norm)}\right]}. \quad (3.1.23)$$

Aceste rezultate ne conduc la o reprezentare calitativă a ecuației (3.1.18) în coordonate φ_{norm} N_{norm} (fig. 3.1R, b). Pe curbă se pot pune în evidență cele patru etape ale ciclului, de la punctul 1, dacă se alege un sens corespunzător de curgere a timpului.

4°. Puterea de ieşire a laserului se obţine cu relaţia

$$\mathscr{P}_{ies} = \frac{\hbar\Omega}{\tau_m} \frac{\tau_c}{T_1} \frac{N^e_{norm}}{\tau_c} (N^e_{norm} - 1) = \frac{\varphi_{norm}\hbar\Omega}{\tau_m}. \qquad (3.1.24)$$

În cazul regimului tranzitoriu studiat, densitatea de energie corespunzătoare impulsului va fi dată de $\varphi_{max(norm)}$

$$\varphi_{max(norm)} = \ln \frac{\varphi_{max(norm)}}{\varphi_{min(norm)}}.$$

Ţinînd seama de datele problemei

$$\varphi_{min(norm)} = \varphi_{i(norm)} = 10^{-10} \qquad (3.1.25)$$

$$\varphi_{max(norm)} = \ln \frac{\varphi_{max(norm)}}{10^{-10}} = 26.$$

Puterea maximă în impuls va fi

$$\mathscr{P}_{max} = \frac{\varphi_{max(norm)} \cdot \hbar\Omega}{\tau_m} \qquad (3.1.26)$$

$$\mathscr{P}_{max} = 1{,}75 \cdot 10^3 \text{ W}$$

$$N_{max(norm)} = 1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-9}(2-1)}{4 \cdot 10^{-3}} [-1 - \ln 10^{-10}]} = 1{,}0066$$

$$N_{min(norm)} = 1 - 0{,}0066.$$

Calculul energiei totale eliberate circuitului :

Se observă că durata pulsului este mult mai mică decît timpul de relaxare longitudinal, astfel că aproape în totalitate energia cedată prin trecerea de la $N_{max(norm)}$ la $N_{min(norm)}$ în timpul regimului tranzitoriu va fi preluată de circuit. În acest fel energia cedată circuitului va fi

$$\mathscr{E} = \frac{\hbar\Omega}{2} (N_{max(norm)} - N_{min(norm)}) N^0_{norm} V = 3{,}56 \cdot 10^{-3} \text{ jouli}. \qquad (3.1.27)$$

5°. Ecuațiile (3.1.7) și (3.1.9) se mai scriu

$$\dot{N}_{norm} = \frac{(1 - N^e_{norm})\, N_{norm}\, \varphi_{norm}}{T_1} - \frac{N_{norm} - N^e_{norm}}{T_1} \approx$$

$$\approx \frac{1 - N^e_{norm}}{T_1} (N_{norm}\varphi_{norm} - 1) \simeq \frac{1 - N^e_{norm}}{T_1} N_{norm}\, \varphi_{norm} \quad (3.1.28)$$

$$\dot{\varphi}_{norm} = \frac{\varphi_{norm}}{\tau_c} (N_{norm} - 1) \quad (3.1.29)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{norm}}{\mathrm{d}N_{norm}} = \frac{\dot{\varphi}_{norm}}{\dot{N}_{norm}} = \frac{\varphi_{norm}}{\tau_c} (N_{norm} - 1) \frac{T_1}{(1 - N^e_{norm})\, N_{norm}\, \varphi_{norm}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{norm}}{\mathrm{d}N_{norm}} = -\frac{T_1}{\tau_c} \frac{(N_{norm} - 1)}{(N^e_{norm} - 1)\, N_{norm}} \quad (3.1.30)$$

Prin integrare se obține:

$$\varphi = -\frac{T_1}{\tau_c} \frac{N_{norm}}{N^e_{norm} - 1} + \frac{T_1}{\tau_c (N^e_{norm} - 1)} \ln N_{(norm)} + \mathrm{Ct.} \quad (3.1.31)$$

Constanta se determină din condițiile la limită specifice regimului Q-switch în momentul declanșării

$$\varphi_{norm} = 0; \quad N_{norm} = N^e_{norm}.$$

Rezultă

$$\varphi_{norm} = \frac{T_1}{\tau_c (N_{norm} - 1)} \left[\ln \frac{N_{norm}}{N^e_{norm}} + N^e_{norm} - N_{norm} \right]. \quad (3.1.32)$$

Densitatea de energie maximă se obține anulînd expresia (3.1.30),

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{norm}}{\mathrm{d}N_{norm}} = 0.$$

Rezultă $N_{norm} = 1$

$$\varphi_{max(norm)} = \frac{T_1}{\tau_c(N^e_{norm} - 1)} \left[\ln \frac{1}{N^e_{norm}} + N^e_{norm} - N_{norm}\right]$$

$$\varphi_{max(norm)} = 0{,}65 \cdot 10^6$$

$$\mathscr{P}_{max\ impuls} = \frac{\hbar\Omega}{\tau_m} \frac{\tau_c}{T_1} \frac{N^0_{norm}}{2} (N^e_{norm} - 1) \cdot 0{,}65 \cdot 10^6 = 16{,}8 \cdot 10^6 \text{ W}.$$

Pulsul fiind considerat triunghiular, durata sa medie va fi dată de $\frac{T}{2}$ (fig. 3.1R, c)

$$\mathscr{E} = \frac{T\mathscr{P}_{max\ imp}}{2}$$

$$\frac{T_2}{2} = \frac{\varepsilon}{\mathscr{P}_{max\ imp}}$$

$$\frac{T}{2} = 1{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

3.2. Deoarece mediul activ din cavitate are un indice de refracție care depinde de frecvență, frecvența centrală a oscilației laser va fi diferită de frecvența centrală a benzii de rezonanță a cavității pasive.

În cazul lărgirii omogene a liniei, susceptibilitatea electrică a mediului este

$$\chi_e(\Omega) = \frac{1}{\varepsilon\hbar} \frac{|\bar{\mu}^e_{nm}|^2}{3} (N_m - N_n) \frac{1}{(\Omega - \omega) + i\frac{1}{T_2}} = \chi'_e + i\chi''_e \quad (3.2.1)$$

sau descompunînd

$$\chi'_e(\Omega) = \frac{1}{\varepsilon\hbar} \frac{|\bar{\mu}^e_{nm}|^2}{3} (N_m - N_n) \frac{\omega - \Omega}{(\Omega - \omega)^2 + \frac{1}{T_2}} \quad (3.2.2)$$

$$\chi''_e(\Omega) = -\frac{1}{\varepsilon\hbar} \frac{|\bar{\mu}^e_{nm}|^2}{3} (N_m - N_n) \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Omega - \omega)^2 + \frac{1}{T_2^2}}.$$

În cazul unei unde plane amplitudinea cîmpului la un moment dat are expresia

$$\bar{E}(z) = \bar{E}(0)\ \exp\ [iKz] \tag{3.2.3}$$

unde constanta de propagare $K = \frac{\Omega n_r}{c}$.

Cînd mediul în care se propagă unda este dispersiv, constanta de propagare devine complexă

$$\widetilde{K} = \frac{\Omega}{c}\widetilde{n}_r \tag{3.2.4}$$

unde $\widetilde{n}_r = \sqrt{\widetilde{\varepsilon}_r}$ este indicele de refracţie complex al mediului. Scriind

$$\widetilde{n}_r = n_r + i\beta \tag{3.2.5}$$

ecuaţia (3.2.3) devine

$$\bar{E}(z) = \bar{E}(0)\exp\left[-i\frac{\Omega}{c}(n_r + i\beta)z\right] = \bar{E}(0)\exp\left[-i\frac{\Omega}{c}n_r z + \frac{\Omega}{c}\beta z\right] \tag{3.2.6}$$

şi arată că intensitatea cîmpului variază exponenţial cu distanţa în timpul propagării prin mediu.

Ţinînd seama de relaţia

$$\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon + \chi_e \tag{3.2.7}$$

$$\widetilde{n}_r = \sqrt{\widetilde{\varepsilon}_r} = n_r\left(1 + \frac{\chi_e}{n_r^2}\right)^{1/2} = n_r\left(1 + \frac{\chi_e'}{n_r^2} + i\,\frac{\chi_e''}{n_r^2}\right)^{1/2}. \tag{3.2.8}$$

Făcînd o apreciere a ordinului de mărime al celor două componente ale susceptibilităţii electrice găsim că $\chi_e', \chi_e'' \ll 1$ ceea ce justifică o dezvoltare în serie în ecuaţia (3.2.8) şi păstrarea primilor doi termeni, adică

$$n_r = n_r\left(1 + \frac{1}{2n_r^2}\chi_e' + \frac{i}{2n_r^2}\chi_e''\right). \tag{3.2.9}$$

Comparînd expresia (3.2.9) cu ecuaţia (3.2.5) obţinem partea reală a indicelui de refracţie

$$n_r(\Omega) = n_r\left[1 + \frac{1}{2n_r^2\varepsilon_0\hbar}\,\frac{|\overline{\mu}^e_{nm}|^2}{3}(N_m - N_n)\frac{\omega_0 - \Omega}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \frac{1}{T_2^2}}\right]. \quad (3.2.10)$$

iar $\beta(\Omega) = +\frac{1}{2n_r}\chi_e''$, deci coeficientul de amplificare în cazul existenţei inversiei de populaţie

$$\alpha(\Omega) = -\frac{\Omega}{\hbar\varepsilon_0 n_r c}\,\frac{|\overline{\mu}^e_{nm}|^2}{3}(N_m - N_n)\frac{\frac{1}{T_2}}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \frac{1}{T_2^2}}. \quad (3.2.11)$$

Din relaţiile (3.2.10) şi (3.2.11) rezultă

$$n_r(\Omega) = n_r - \frac{c}{2\Omega}\,\frac{\omega_0 - \Omega}{\frac{1}{T_2}}\,\alpha(\Omega). \quad (3.2.12)$$

Interesează valoarea coeficientului de cîştig pentru frecvenţa radiaţiei laser, $\Omega = \omega_L$,

$$n_r(\omega_L) = n_r - \frac{c}{2\omega_L}\,\frac{\omega_0 - \omega_L}{\Delta\omega}\,\alpha(\omega_L) \quad (3.2.13)$$

unde am notat $\Delta\omega = \frac{1}{T_2}$ semilărgimea curbei de răspuns a atomilor (de tip Lorentz).

În regim staţionar $\alpha = \frac{\gamma}{l}$, unde γ sînt pierderile relative medii pe un parcurs. Timpul de viaţă al radiaţiei în cavitate este legat de pierderi prin relaţia

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{\gamma c}{l n_r} = \Delta\omega_c. \quad (3.2.14)$$

Folosind ecuaţia (3.2.14), relaţia (3.2.13) se scrie

$$n(\omega_L) = n_r \left(1 - \frac{(\omega_0 - \omega_L)\,\Delta\omega_c}{2\omega_L \Delta\omega}\right). \tag{3.2.15}$$

Frecvenţa de rezonanţă a cavităţii pasive este dată de

$$\omega_c = q \frac{c\pi}{l n_r}. \tag{3.2.16}$$

Cînd $n_r = n_r(\omega_L)$ obţinem din ecuaţia (3.2.16) ecuaţia pentru valoarea frecvenţei cavităţii în cazul existenţei amplificării, adică frecvenţa laser

$$\omega_L = q \frac{c\pi}{l n_r(\omega_L)}. \tag{3.2.17}$$

Folosind ecuaţia (3.2.16) şi (3.2.17) relaţia (3.2.15) devine

$$\omega_c = \frac{2\omega_L \Delta\omega - (\omega_0 - \omega_L)\,\Delta\omega_c}{2\Delta\omega} \tag{3.2.18}$$

de unde rezultă ecuaţia

$$\frac{\omega_L - \omega_c}{\omega_0 - \omega_L} = \frac{\Delta\omega_c}{2\Delta\omega}. \tag{3.2.19}$$

Semilărgimea benzii de rezonanţă a cavităţii este mai mică decît semilărgimea curbei de răspuns a atomilor

$$\Delta\omega_c < \Delta\omega$$

astfel încît raportul din membrul stîng trebuie să fie cuprins între zero şi unu

$$\frac{\omega_L - \omega_c}{\omega_0 - \omega_L} > 0$$

înseamnă că dacă $\omega_0 > \omega_L$ atunci $\omega_L > \omega_c$, deci frecvenţa modului este tîrîtă spre frecvenţa centrală ω_0.

Scriind $\omega_0 - \omega_L = \omega_0 - \omega_c + \omega_c - \omega_L$ ecuaţia (3.2.19) devine, folosind datele problemei,

$$\frac{\omega_L - \omega_c}{\omega_c - \omega_L + 10^6} = \frac{\pi \cdot 10^9}{2\pi \cdot 10^{11}}$$

$$1{,}005\,(\omega_L - \omega_c) = 5 \cdot 10^3 \ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_L - \omega_c = 5000 \ \mathrm{s}^{-1}.$$

Deci frecvenţa centrală a profilului laser este la depărtare de $5 \cdot 10^3 \ \mathrm{s}^{-1}$ de frecvenţa modului cavităţii pasive, ω_c.

3.3. 1°. În teoria perturbaţiei de ordinul întîi, rata de tranziţie dintre stările discrete iniţială $|I\rangle$ şi finală $|F\rangle$ e dată de expresia

$$w_{FI} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle F | V | I \rangle|^2 \, \delta(\mathscr{E}_{FI}) \tag{3.3.1}$$

unde V este termenul de perturbaţie din hamiltonianul ce descrie tranziţia şi $\mathscr{E}_{FI}$ este diferenţa de energie între stările iniţială şi finală.

Ne interesează tranziţiile radiative care măresc numărul de fotoni din modul m al cavităţii active. Starea iniţială are N_m fotoni în modul m şi o moleculă excitată pe nivelul $|B\rangle$, deci se poate scrie

$$|I\rangle = |N_m ; \ B\rangle \tag{3.3.2}$$

iar starea finală are $(N+1)_m$ fotoni în modul m şi o moleculă în una din stările $|a\rangle$ adică

$$|F\rangle = |(N+1)_m ; \ a\rangle. \tag{3.3.3}$$

Tranziţia $I \to F$ e indicată cu săgeata „emisie" în figura 3.3.

În cazul cel mai important, acela al cuplajului de dipol electric între stările B şi a, elementul de matrice al lui V se poate scrie sub forma

$$|\langle F | V | \mathrm{I} \rangle|^2 = \frac{1}{2} (\hbar \omega_m) \frac{(N+1)_c}{V_c n_r^2} |\overline{\mu^e_{B\to a}} \cdot \bar{p}_m|^2 \tag{3.3.4}$$

unde ω_m şi $\bar{p}_m$ sînt frecvenţa şi vectorul de polarizare al modului m, V_c — volumul cavităţii, $\overline{\mu^e_{Ba}}$ elementul de matrice al tranziţiei de dipol electric şi n_r indicele de refracţie al mediului.

Existînd mai multe stări de rotaţie şi vibraţie notate cu a, trebuie luate în consideraţie toate tranziţiile $B \to a$, care respectă conservarea energiei şi contribuie cu un foton la modul m, adică

$$\sum_a w_{FI} = \frac{(N+1)_m}{V} \sum_a M_{B\to a}\delta \cdot (\mathscr{E}_{FI}) \qquad (3.3.5)$$

unde M_{Ba} apare din suma peste $\frac{\pi\omega_m |\overline{\mu^e_{Ba}} \cdot \overline{pm}|^2}{n_r^2}$, după toate numerele cuantice ale stărilor finale a pentru o energie a stării finale $\mathscr{E}_a$ fixată.

Funcţia $\delta(\mathscr{E}_{FI})$ permite doar tranziţiile pentru care se conservă energia, adică acelea pentru care se respectă $\mathscr{E}_a + \hbar\omega_m = \mathscr{E}_B$.

Dacă stările finale sînt distribuite continuu, se defineşte densitatea de stări ρ_a, ca numărul de stări energetice din intervalul $d\mathscr{E}_a$, adică $\rho_a = \frac{dN}{d\mathscr{E}_a}$ şi se înlocuieşte suma prin integrală, astfel că rata de emisie totală din starea B, cu producerea unui foton în modul m al cavităţii, capătă expresia

$$N_B \sum_a w_{FI} = \frac{(N+1)_m}{V} N_B \overline{\overline{M}}_{B\to a}\overline{\overline{\rho}}_a \qquad (3.3.6)$$

unde barele indică că ρ_a şi $M_{B\to a}$ sînt evaluate la

$$\mathscr{E}_a = \mathscr{E}_B - \hbar\omega_m$$

Ratele de absorbţie indusă pentru tranziţiile $|A> \to |b>$ şi $|C> \to |d>$ se calculează asemănător, cu singura diferenţă că lipsind procesul de absorbţie, $(N+1)_m$ devine N_m.

Rata de absorbţie devine o sumă de doi termeni

$$\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{abs} = \frac{N_m}{V_c} [\overline{\overline{N}}_c \overline{\overline{M}}_{C\to d}\overline{\overline{\rho}}_d + N_A \overline{\overline{M}}_{A\to b}\overline{\overline{\rho}}_b]. \qquad (3.3.7)$$

Ţinem cont şi de pierderile ce sînt independente de moleculele active şi depind de cavitate. Definim rata de pierdere a fotonilor prin aceste mecanisme prin produsul dintre densitatea fotonilor $\frac{N_m}{V}$ şi funcţia fenomenologică de pierderi dispersive $d(\lambda_m)$.

Rata de cîştig net în modul m al cavităţii va fi

$$\frac{dN_m}{dt} = \frac{N_m}{V_c}\left[\frac{(N+1)_m}{N_m} N_B \overline{\overline{M}}_{B\to a}\overline{\rho}_a - N_C \overline{\overline{M}}_{Cd}\overline{\rho}_d - N_A \overline{\overline{M}}_{A\to b}\rho_b - d(\lambda m)\right]. \quad (3.3.8)$$

Pentru a putea folosi această expresie în calcule va trebui să identificăm termenii ce apar prin mărimi măsurabile.

Primul termen din (3.3.8) poate fi legat de timpul de viaţă de fluorescenţă al stării excitate.

$\overline{\overline{M}}_{Ba}\overline{\rho}_a\, n(\lambda)\, d\lambda$ este rata de emisie spontană la lungimea de undă în vid λ, dată de o moleculă în starea B, dacă $n(\lambda)\, d\lambda$ este numărul de moduri ale cavităţii din unitatea de volum, din domeniul $d\lambda$, adică, este rata cu care o moleculă din starea B trece pe una din stările a înmulţită cu probabilitatea ca tranziţia să fie însoţită de emisia unui foton cu lungimea de undă în domeniul $d\lambda$. Putem deci scrie

$$\overline{\overline{M}}_{B\to a}\overline{\rho}_a\, n(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\tau} W(\lambda)\, d\lambda \quad (3.3.9)$$

unde τ e timpul de viaţă al stării B şi $W(\lambda)$ probabilitatea de emisie a fotonului.

Deoarece nu toate dezexcitările stării B sînt radiative, suma probabilităţilor de emisie ale fotonilor e mai mică decît unu.

La fel se întîmplă şi cu funcţia

$$\Phi = \int W(\lambda)\, d\lambda \leqslant 1 \quad (3.3.10)$$

Putem înlocui densitatea de moduri $n(\lambda)\, d\lambda = \frac{8\pi n_r^3}{\lambda^4}\, d\lambda$ şi atunci

$$N_B \overline{\overline{M}}_{B\to a}\overline{\rho}_a = N_B \frac{\lambda^4 W(\lambda)}{8\pi\tau n_r^3}. \quad (3.3.11)$$

Ceilalţi doi termeni pot fi notaţi la fel.

Colorantul e bine descris de un coeficient de absorbţie liniar, adică în absenţa moleculelor excitate, numărul de fotoni scade exponenţial cu lungimea drumului prin colorant

$$\frac{dN_m}{dt} = -(\Gamma_S + \Gamma_T) N_m$$

unde Γ_S şi Γ_T sînt respectiv coeficienţii de absorbţie pentru singlet şi triplet.

Coeficienţii de absorbţie vor fi proporţionali cu concentraţiile de singleţi şi tripleţi, adică cu $n_S = \frac{N_A}{V}$ pentru singleţi şi $n_T = \frac{N_C}{V}$ pentru tripleţi. Putem scrie

$$\Gamma_S = n_S \sigma_s$$

$$\Gamma_T = n_T \sigma_T$$

unde σ_S şi σ_T sînt secţiunile eficace de absorbţie.

Cîştigul scris în funcţie de mărimi măsurabile devine

$$\frac{dN_m}{dl} = N_m \left(\frac{\lambda^4 W(\lambda)}{8\pi c \tau n_r^2} n^* - \sigma_S n_S - \sigma_T n_T - \gamma \right) \qquad (3.3.12)$$

unde n^* este concentraţia de singleţi excitaţi şi γ rata de pierderi a fotonilor pe unitatea de lungime activă datorită oglinzilor şi altor cauze independente de concentraţia moleculelor.

Dacă ţinem cont doar de pierderile prin oglinzi şi ferestre, atunci

$$\gamma = -\frac{1}{2l} \ln r_1 r_2 t_1 t_2, \qquad (3.3.13)$$

unde r şi t sînt coeficienţii de reflexie şi transmisie.

Putem scrie cîştigul mediu sub forma

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{N_m} \frac{dN_m}{dl} = \sigma_{em} n^* - \sigma_T n_T - \sigma_S n_S - \gamma \qquad (3.3.14)$$

unde am definit secţiunea eficace de emisie

$$\sigma_{em} = \frac{\lambda^4 W(\lambda)}{8\pi n_r^2 c \tau}.$$

În ecuaţia (3.3.14) nu toate mărimile sînt independente. Astfel, suma concentraţiilor moleculelor de colorant în diferite stări e egală cu concentraţia totală a moleculelor de colorant prezente în mediul activ.

În plus, deoarece starea de triplet C se află sub starea S_1 (figura 3.3) există probabilitatea diferită de zero ca o moleculă să treacă din una din stările S_1 în una din stările T_1 și de aici în S_0. Timpul de viață al moleculelor în una din stările T_1 e de ordinul $\tau_T = 100$ ns, de cîteva ori mai mic decît duratele care ne interesează, astfel că putem considera că moleculele de colorant părăsesc starea de triplet la fel de repede cum alte molecule trec în această stare de triplet (aproximația echilibrului tripletului).

Atunci ecuația ratei pentru populația tripletului se poate scrie

$$\dot{n}_T = n^* W_{ST} - \frac{n_T}{\tau_T} \tag{3.3.15}$$

unde W_{ST} este rata de tranziție dintre S_1 și T_1. Dacă populația tripletului e în echilibru, avem $\dot{n}_T = 0$ și urmează că

$$n_T = n^* k_{ST} \tau_T . \tag{3.3.16}$$

Putem elimina concentrațiile de tripleți și singleți și cîștigul devine

$$\alpha(\lambda) = \beta n^* - \gamma_S n - r \tag{3.3.17}$$

unde

$$\beta = \sigma_{em} + \sigma_S + W_{ST} \tau_T (\sigma_S - \sigma_T). \tag{3.3.18}$$

Efectul stării de triplet apare în două moduri distincte: prin $W_{ST}\ \tau_T$ și prin dependența de lungimea de undă λ a lui σ_T, dar pentru că $W_{ST}\ \tau_T$ poate fi modificat experimental, efectul poate fi redus mult.

Deoarece numărul de fotoni din cavitate crește doar dacă cîștigul e pozitiv, condiția $\alpha = 0$ apare ca o condiție de prag pentru efectul laser.

Condiția de prag, $\alpha = 0$, poate fi inversată să dea pragul pentru populația stării excitate, adică

$$n^*\Big|_{\alpha=0} = n^* \left(\frac{\gamma}{n},\ W_{ST} \tau_T,\ \lambda\right)\Big|_{\alpha=0} . \tag{3.3.19}$$

În cazul unui laser cu colorant, $W_{ST}\ \tau_T$ poate fi menținut constant și $n^*|_{\alpha=0}$ apare ca o funcție doar de $\frac{\gamma}{n}$ și λ.

2°. Supusă restricţiilor $\alpha = 0$ şi $W_{ST} \cdot \tau_T$ constant, concentraţia relativă a stării excitate necesare pentru apariţia efectului laser $\left(\frac{n^*}{n}\right)\Big|_{\alpha=0}$ poate fi prezentată sub forma unei suprafeţe tridimensionale într-un spaţiu cu axele $\frac{n^*}{n}$, $\frac{\gamma}{n}$, λ.

În principiu, efectul laser poate apărea la orice lungime de undă şi la orice pierdere externă, pentru care e realizabilă fizic condiţia ca o fracţiune din moleculele de colorant să fie excitate pe suprafaţa de cîştig nul $\left(\frac{n^*}{n}\right)_{\alpha=0}$.

Experimental, $\frac{\gamma}{n}$ este fixat de reflectivitatea oglinzii, împrăştiere şi pierderile prin difracţie. O pierdere externă nedispersivă poate fi reprezentată ca un plan normal pe axa $\frac{\gamma}{n}$. Intersecţia unui astfel de plan cu suprafaţa de cîştig total nul defineşte o linie de „izopierderi".

Pragul laser e definit de punctul de minim $\left(\frac{n^*}{n}\right)_{\alpha=0}$ de pe curba de izopierderi. E evident că cu cît cresc pierderile, minimele apar la lungimi de undă mai mici şi la valori ale lui $\frac{n^*}{n}$ mai mari.

În contrast cu situaţia descrisă, pierderile pot fi dispersive, cum ar fi în cazul prismelor aşezate în cavitate, a oglinzilor dispersive, sau a reţelelor de difracţie folosite pentru acordarea laserilor cu coloranţi.

În cazul unei dispersii mari, pierderile sînt infinite pentru toate lungimile de undă cu excepţia uneia singure.

Posibilitatea unui element dispersiv din cavitatea laser de a specifica o lungime de undă dată e echivalentă cu alegerea unui plan avînd lungimea de undă constantă. Valoarea pierderilor asociate cu elementul dispersiv la acea lungime de undă determină o curbă de izopierderi pe suprafaţă. Intersecţia curbei de izopierderi cu planul de lungime de undă constantă determină punctul de pe suprafaţa de cîştig total nul unde apare efectul laser. Acest punct nu se aşează obligatoriu pe locul geometric al minimelor.

Punctele de pe suprafaţa de cîştig, ce determină apariţia efectului laser, aflate în afara locului geometric al minimelor se numesc „acordate extern" pentru că presupun elemente dispersive externe mediului activ în care apare efectul.

Analog, punctele aflate pe locul geometric al minimelor le numim „autoacordate".

Punctul minim al curbei de izopierderi care este pragul pentru efectul laser „autoacordat" se poate determina punînd condiția ca $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{n^*}{n}\right) = 0$ pe suprafața de cîștig nul.
Aceasta se poate scrie sub forma

$$\beta n^* - \sigma_S n - r = 0$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\lambda} n^* - \frac{\partial\sigma_S}{\partial\lambda} n - \frac{\partial r}{\partial\lambda} = 0. \qquad (3.3.20)$$

Deoarece proprietățile dispersive ale oglinzilor pot fi modificate independent de reflectivitatea lor absolută, $\frac{\partial r}{\partial\tau}$ poate fi considerat independent de r și ecuația (3.3.20) apare ca un sistem algebric pentru n^* și r.

Reflectivitatea r poate depinde foarte slab de lungimea de undă (cazul autoacordării) și foarte puternic de lungimea de undă (cazul acordării externe). Soluțiile ecuației (3.3.20) sînt

$$\frac{n^*}{n} = \frac{\frac{\partial\sigma_S}{\partial\lambda} + \frac{1}{n}\frac{\partial r}{\partial\lambda}}{\frac{\partial\beta}{\partial\lambda}} \qquad (3.3.21)$$

$$\frac{r}{n} = \frac{\beta}{\frac{\partial\beta}{\partial\lambda}}\left[\frac{\partial\sigma_S}{\partial\lambda} + \frac{1}{n}\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right] - \sigma_S. \qquad (3.3.22)$$

Este evident că n^* trebuie să fie mai mic decît diferența dintre concentrația totală n și concentrațiile de molecule aflate în starea de triplet n_T, adică $n^* \leqslant n - n_T$, care conform ecuației (3.3.16) înseamnă că $n^* \leqslant \frac{n}{1 + W_{ST}\tau_T}$. Această inegalitate împreună cu ecuația (3.3.19) determină o valoare maximă pentru r/n.

Pierderea trebuie să fie pozitivă astfel că apare o dublă inegalitate

$$\frac{\beta}{1 + W_{ST}} - \sigma_S \geqslant \frac{r}{n} \geqslant 0\,; \qquad (3.3.23)$$

β este o funcţie descrescătoare cu lungimea de undă, care devine negativă pentru $w_{ST}\tau_T > 0$.

Astfel, independent de parametrii externi, efectul laser nu e posibil deasupra lungimii de undă pentru care $\beta = (1 + w_{ST} \cdot \tau_T)\sigma_S$. Folosind ecuaţia (3.3.18) condiţia devine

$$w_{ST} \cdot \tau_T = \frac{\sigma_{em}}{\sigma_S}. \qquad (3.3.24)$$

În cazul absenţei unei acordări externe, apare o altă condiţie pentru domeniul în care se poate realiza pragul.

Ecuaţia (3.3.22) cu condiţia ca $\frac{\partial r}{\partial \lambda} = 0$ nu poate fi satisfăcută pentru lungimi de undă aflate deasupra punctului critic, în care

$$\frac{r_c}{n} = \left(\frac{\partial \beta_c}{\partial \lambda}\right)^{-1} \beta_c \left(\frac{\partial \sigma_{Sc}}{\partial \lambda}\right) - \sigma_{Sc}.$$

Această funcţie este monotonă cu lungimea de undă astfel că lungimea de undă limită e definită de relaţia $r_c = 0$, care se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{\sigma_{Sc}} \frac{\partial \sigma_{Sc}}{\partial \lambda} = \frac{1}{\beta_c} \frac{\partial \beta_c}{\partial \lambda}, \qquad (3.3.25)$$

apărînd ca o condiţie de prag pentru autoacordare.

Condiţia (3.3.25) e mai severă decît (3.3.24) deoarece se realizează la lungimi de undă mai mici.

În cazul unei acordări din exterior, $\frac{\partial r}{\partial \lambda}$ poate deveni negativ şi pragul apare la orice lungime de undă aflată sub cea dată de condiţia (3.3.24).

Condiţia de prag pentru autoacordare (3.3.25) impune o valoare minimă pentru inversia critică $\frac{n^*}{n}$ care poate produce un cîştig în soluţia de colorant.

3.4. Populaţia stării $|k>$ este $N_0\rho_{kk} = N_k$ unde ρ_{kk}, elementul diagonal al matricii densitate, satisface ecuaţia

$$\frac{\partial \rho_{kk}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\mathscr{H}', \rho]_{kk} + \sum_n (\rho_{nn} w_{nk} - \rho_{kk} w_{kn}). \qquad (3.4.1)$$

Elementele diagonale pentru stările neafectate de perturbaţie, $j \neq k, m$ satisfac ecuaţia

$$\frac{\partial \rho_{jj}}{\partial t} = \sum_n (\rho_{nn} w_{nj} - \rho_{jj} w_{jn}). \qquad (3.4.2)$$

Înmulţind ecuaţiile (3.4.1) şi (3.4.2) cu numărul total N_0 al atomilor din unitatea de volum, obţinem ecuaţiile ratelor pentru populaţii:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} N_0[\mathscr{H}', \rho]_{kk} + N_0 \sum_n (\rho_{nn} w_{nk} - \rho_{kk} w_{kn}) \qquad (3.4.3)$$

în cazul stărilor afectate de perturbaţie şi

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = N_0 \sum_n (\rho_{nn} w_{nj} - \rho_{jj} w_{jn}) \qquad (3.4.4)$$

pentru stările neafectate de perturbaţie.

Folosind relaţia $\mathscr{H}' = -\bar{\mu}^e \bar{E}$, ecuaţia (3.4.3) devine

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} N_0 \bar{E}(\bar{\mu}^e_{km} \rho_{mk} - \rho_{km} \bar{\mu}^e_{mk}) + N_0 \sum_n (\rho_{nn} w_{nk} + \rho_{kk} w_{kn}). \quad (3.4.5)$$

Semnificaţia primului termen din membrul drept se găseşte cu ajutorul ecuaţiei pentru calcularea valorii medii a polarizării rezonante a mediului

$$\bar{P} = N_0 \text{ Urma } ((\rho)\ (\bar{\mu}^e)). \qquad (3.4.6)$$

Derivînd această ecuaţie în raport cu timpul, ţinînd seama că $\bar{\mu}^e$ este independent de timp şi folosind ecuaţia de mişcare pentru elementele nediagonale ale matricei densitate

$$\frac{\partial \rho_{eS}}{\partial t} = -i\omega_{eS}\rho_{eS} - \frac{i}{\hbar}[\mathscr{H}', \rho]_{eS} - \frac{1}{\tau_{eS}}\rho_{eS} \qquad (3.4.7)$$

ecuaţia (3.4.5) devine

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = -\frac{\dot{\bar{P}}\bar{E}}{\hbar\omega_{km}} + \sum_n (N_n w_{nk} - N_k w_{kn}) \qquad (3.4.8)$$

şi analog pentru populaţia stării inferioare $|m>$. Pentru stările neimplicate în tranziţia stimulată, populaţiile vor evolua conform ecuaţiei

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \sum_n (N_n w_{nj} - N_j w_{jn}). \qquad (3.4.9)$$

Pentru a găsi semnificaţia produsului $\dot{\bar{P}}\,\bar{E}$, considerăm expresii de tip armonic pentru $\bar{E}$ şi $\bar{P}$ adică

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\tilde{\bar{E}} \exp\ [i(\Omega t - \bar{k}\bar{r})] + \text{c.c.})$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}(\tilde{\bar{P}} \exp\ [i(\Omega t - \bar{k}\bar{r})] + \text{c.c.}) \qquad (3.4.10)$$

unde $\tilde{\bar{E}}$ şi $\tilde{\bar{P}}$ sînt amplitudini complexe, iar c.c. exprimă cantitatea complex conjugată.

Medierea peste orice timp de interes fizic va avea ca rezultat o contribuţie nulă din partea termenilor rapid variabili în timp astfel încît se obţine

$$\dot{\bar{P}}\bar{E} = \frac{i\Omega}{4}(\tilde{\bar{P}}\tilde{\bar{E}}^* - \tilde{\bar{P}}^*\tilde{\bar{E}}). \qquad (3.4.11)$$

Ţinînd seama de relaţia $\tilde{\bar{P}} = \varepsilon_0 \chi_e \tilde{\bar{E}}$, unde $\chi_e = \chi_e' + i\chi_e''$ este susceptibilitatea electrică rezonantă a mediului, ecuaţia (3.4.11) devine

$$\dot{\bar{P}}\bar{E} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \Omega \chi_e'' |\tilde{\bar{E}}|^2. \qquad (3.4.12)$$

Dar aceasta este tocmai energia schimbată de cîmp cu unitatea de volum a mediului, astfel încît putem scrie

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \Omega \chi_e'' |\tilde{\bar{E}}|^2 = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = -\Gamma I \qquad (3.4.13;\ 14)$$

unde coeficientul de absorbţie Γ este dat de

$$\Gamma I = (N_k - N_m)\hbar\omega_{km} W_{km}. \qquad (3.4.15)$$

Cu aceste observaţii ecuaţiile ratelor pentru stările perturbate devin

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = (N_m - N_k) W_{km} + \sum_n (N_n w_{nk} - N_k w_{kn}). \qquad (3.4.16)$$

Pentru a găsi ecuaţiile ratelor pentru cîmpul de radiaţie folosim ecuaţiile cuplate pentru cîmp şi polarizare

$$\ddot{\bar{P}} + \frac{2}{T_2}\dot{\bar{P}} + \omega^2 \bar{P} = \frac{2\omega\bar{E}}{\hbar}(N_k - N_m)\frac{|\bar{\mu}^e_{km}|^2}{3} \qquad (3.4.17)$$

$$\ddot{\bar{E}} + \frac{1}{\tau_c}\dot{\bar{E}} + \omega_c^2\bar{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\ddot{\bar{P}} \qquad (3.4.18)$$

unde T_2 reprezintă timpul de relaxare transversală, iar ω_c frecvenţa modului considerat al cavităţii.

Considerînd din nou pentru $\bar{E}$ şi $\bar{P}$ expresii armonice în care amplitudinile sînt funcţii lent variabile de timp, deci derivatele lor de ordinul doi neglijabile, ecuaţiile (3.4.17) şi (3.4.18) devin

$$\dot{\tilde{\bar{E}}} + \frac{1}{2\tau_c}\tilde{\bar{E}} = -\frac{i\Omega}{2\varepsilon_0}\tilde{\bar{P}} \qquad (3.4.19)$$

$$\dot{\tilde{\bar{P}}} + \frac{1}{T_2}\tilde{\bar{P}} = \frac{1}{\hbar}\frac{|\bar{\mu}^e_{km}|^2}{3}(N_k - N_m)\tilde{\bar{E}} \qquad (3.4.20)$$

unde am ţinut cont de faptul că $\frac{1}{\tau_c} \ll \Omega$ şi $\frac{1}{T_2} \ll \Omega$. Observînd că în ecuaţia (3.4.20) primul termen este neglijabil faţă de cel următor, ecuaţia (3.4.19) devine

$$\dot{\tilde{\bar{E}}} + \frac{1}{2\tau_c}\tilde{\bar{E}} = \frac{\Omega T_2}{2\hbar\varepsilon_0}\frac{|\bar{\mu}^e_{km}|^2}{3}(N_k - N_m)\tilde{\bar{E}}. \qquad (3.4.21)$$

Înmulţind ambii membrii ai ecuaţiei (3.4.21) cu $\tilde{\bar{E}}^*$ obţinem

$$\frac{d}{dt}|\tilde{\bar{E}}|^2 + \frac{1}{\tau_c}|\tilde{\bar{E}}|^2 = \frac{\Omega T_2}{\hbar\varepsilon_0}\frac{|\bar{\mu}^e_{km}|^2}{3}(N_k - N_m)|\tilde{\bar{E}}|^2. \qquad (3.4.22)$$

Ţinînd seama că densitatea medie de energie a cîmpului de radiaţie este

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\tilde{\bar{E}}|^2 \qquad (3.4.23)$$

prin împărţire cu $\hbar\Omega$ se obţine o funcţie

$$u_f = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0|\tilde{\bar{E}}|^2}{\hbar\Omega} \qquad (3.4.24)$$

care poate fi considerată că reprezintă numărul mediu de fotoni din unitatea de volum a modului n considerat, (dacă elementul de volum este mai mare decît λ^3).

Folosind expresia probabilității de tranziție indusă W_{km} în cazul cînd frecvența cîmpului este exact la rezonanță cu tranziția, ecuația (3.4.22) devine

$$\dot{n} + \frac{1}{\tau_c} n = (N_k - N_m) W_{km} \tag{3.4.25}$$

care reprezintă ecuația ratelor pentru cîmpul de radiație și descrie modul în care are loc schimbul de energie între cîmp și mediu.

3.5. 1°. Căutăm pentru P și E soluții de forma

$$P = \frac{1}{2} \tilde{P} \exp[i\omega t] + \frac{1}{2} \tilde{P}^* \exp[-i\omega t] \tag{3.5.1}$$

$$E = \frac{1}{2} \tilde{E} \exp[i\omega t] + \frac{1}{2} \tilde{E}^* \exp[-i\omega t] \tag{3.5.2}$$

unde $\tilde{P}$ și $\tilde{E}$ sînt amplitudini complexe.

Introducînd (3.5.1) și (3.5.2) în ecuațiile de polarizare și cîmp se obține

$$-\omega^2 P + \frac{2i\omega P}{T_1} + \Omega^2 P = -\frac{2\Omega}{\hbar} L \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} NE \tag{3.5.3}$$

$$-\omega^2 E + \frac{i\omega E}{\tau_c} + \omega_c^2 E = \frac{1}{\varepsilon} \omega^2 P. \tag{3.5.4}$$

Din (3.5.3) scoatem pe P și-l introducem în (3.5.4)

$$P = \frac{-\frac{2\Omega}{\hbar} L \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} NE}{\Omega^2 + \frac{2i\omega}{T_2} - \omega^2}$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau_c} + \omega_c^2\right)\left(\Omega^2 - \omega^2 + \frac{2i\omega}{T_2}\right) = -\frac{\omega^2}{\varepsilon} \frac{2\Omega}{\hbar} \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} N$$

$$\left[(\Omega^2 - \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2) - \frac{2\omega^2}{T_2 \tau_c}\right] + i\left[\frac{\omega}{\tau_c}(\omega^2 - \Omega^2) + \frac{2\omega}{T_2}(\omega^2 - \omega_c^2)\right] =$$

$$= \frac{2\Omega}{\hbar} L \frac{|\bar{\mu}_{12}^e|^2}{3} \frac{\omega^2}{\varepsilon} N. \tag{3.5.5}$$

Deoarece relaţia (3.5.5) trebuie să fie adevărată pentru orice frecvenţă, partea imaginară trebuie să se anuleze

$$\frac{\omega}{\tau_c}(\omega^2 - \Omega^2) + \frac{2\omega}{T_2}(\omega^2 - \omega_c^2) = 0. \tag{3.5.6}$$

Din (3.5.6) se obţine

$$\omega^2 = \frac{T_2\Omega^2 + 2\tau_c\omega_c}{T_2 + 2\tau_c}. \tag{3.5.7}$$

Introducînd în (3.5.7) condiţia $\Omega = \omega_c - \Delta\omega$, rezultă poziţia frecvenţei ω faţă de ω_c şi Ω

$$\omega^2 = \frac{T_2(\omega_c - \Delta\omega)^2 + 2\tau_c\omega_c^2}{T_2 + 2\tau_c}$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_c^2\left[\frac{T_2(\omega_c - \Delta\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\tau_c\right]}{T_2 + 2\tau_c} < \omega_c^2 \tag{3.5.8}$$

$$\omega^2 = \frac{T_2\Omega + 2\,\tau_c(\Omega + \Delta\omega)^2}{T_2 + 2\tau_c}$$

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2\left(T_2 + 2\tau_c\,\frac{(\Omega + \Delta\omega)^2}{\Omega^2}\right)}{T_2 + 2\tau_c} > \Omega^2 \tag{3.5.9}$$

$$\Omega^2 < \omega^2 < \omega_c^2.$$

Valorea de regim staţionar a diferenţei de populaţie se obţine egalînd părţile reale ale expresiei (3.5.5)

$$(\Omega^2 - \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2) - \frac{2\omega^2}{T_2\tau_c} = -\frac{2\Omega}{\hbar}\,L\,\frac{|\mu_{12}^e|^2}{3}\,\frac{\omega^2}{\varepsilon}\,N \tag{3.5.10}$$

$$(\Omega^2 - \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2) - \frac{2\omega^2}{T_2\tau_c} = -\frac{2\omega^2}{T_2\tau_c}\,\frac{N}{N_{norm}^0} \tag{3.5.11}$$

$$\frac{N}{N_{norm}^0} = 1 - \frac{T_2\tau_c}{2\omega^2}(\Omega^2 - \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2) \tag{3.5.12}$$

unde

$$\omega^2 = \frac{T_2\Omega^2 + 2\tau_c\omega_c^2}{T_2 + 2\tau_c}$$

$$\Omega^2 - \omega^2 = \Omega^2 - \frac{T_2\Omega^2 + 2\tau_c\omega_c^2}{T_2 + 2\tau_c} = \frac{2\tau_c(\Omega^2 - \omega_c^2)}{T_2 + 2\tau_c}$$

$$\omega_c^2 - \omega^2 = \omega_c^2 - \frac{T_2\Omega^2 + 2\tau_c\omega_c^2}{T_2 + 2\tau_c} = \frac{T_2(\omega_c^2 - \Omega^2)}{T_2 + 2\tau_c}$$

$$\frac{N}{N^0_{norm}} = 1 + \frac{T_2\tau_c\ 2T_2\ \tau_c(\Omega + \omega_c)^2(\Omega - \omega_c)^2}{2(T_2 + 2\tau_c)^2}\ \frac{(T_2 + 2\tau_c)}{T_2\Omega^2 + 2\tau_c\omega_c^2}. \qquad (3.5.13)$$

Cu aproximațiile $\Omega \sim \omega_c$ și $T_2 \ll \tau_c$, (3.5.13) devine

$$\frac{N}{N_0^{norm}} = 1 + \frac{(\omega_c - \Omega)^2}{\left(\frac{2}{T_2}\right)^2}.$$

3°. Aplicație numerică:

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2\left(T_2 + 2\tau_c\,\frac{(\Omega + \Delta\omega)^2}{\Omega^2}\right)}{T_2 + 2\tau_c}$$

$$\omega = \Omega\sqrt{1 + \frac{2\tau_c\left[\frac{(\Omega + \Delta\omega)^2}{\Omega^2} - 1\right]}{T_2 + 2\tau_c}}$$

$$\omega = \Omega\sqrt{1 + \frac{\frac{2\tau_c\Omega\Delta\omega + (\Delta\omega^2)^2}{\Omega^2}}{T_2 + 2\tau_c}}$$

Cu aproximațiile

$$\Delta\omega \ll \Omega, \quad T_2 \ll \tau_c,$$

se obţine

$$\omega = \Omega\sqrt{1 + \frac{\Delta\omega}{\Omega}} \simeq \Omega\left(1 + \frac{\Delta\omega}{2\Omega}\right)$$

$$\omega \approx \Omega + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{\Omega}{2\pi} \pm 50\ \mathrm{MHz}$$

$$\frac{N}{N^0_{norm}} \approx 1 + \frac{(\omega_c - \Omega)^2}{\left(\frac{2}{T_2}\right)^2}$$

$$N \approx 10^{24}\left[1 + \frac{(2\pi \cdot 10^8)^2}{(2\pi \cdot 3{,}3 \cdot 10^{11})^2}\right]$$

$$N \approx (10^{24} + 10^{17})/\mathrm{m}^3.$$

3.6. 1°a) Diferenţa de populaţie pe unitatea de volum, în cazul în care se ţine seama de lărgirea liniei prin efect Doppler va fi

$$\mathrm{d}N = (\Delta\rho)\,\mathrm{d}\mathcal{M} \tag{3.6.1}$$

unde $\mathrm{d}\mathcal{M}$ este numărul de molecule pe unitatea de volum, în intervalul de frecvenţă $\mathrm{d}\Omega_i$,

$$\mathrm{d}\mathcal{M} = N_0 g_D(\Omega_i, \omega_0)\,\mathrm{d}\Omega_i. \tag{3.6.2}$$

În relaţia (3.6.2), N_0 este numărul total de molecule pe unitatea de volum iar $g_D(\Omega_i, \omega_0)$ e funcţia de formă gaussiană a liniei

$$g_D(\Omega_i, \omega_0) = \frac{[(4/\pi)\ln 2]^{1/2}}{\Delta\omega_D}\exp\left[-4(\ln 2)\frac{(\Omega_i - \omega_0)^2}{(\Delta\omega_D)^2}\right] =$$

$$= \frac{0{,}939}{\Delta\omega_D}\exp\left[-4(\ln 2)\frac{(\Omega_i - \omega_0)^2}{(\Delta\omega_D)^2}\right]. \tag{3.6.3}$$

Diferenţa de populaţie pe unitatea de volum, pe unitatea de interval de frecvenţă este

$$\frac{dN}{d\Omega_i} = (\Delta\rho)\frac{d\mathcal{M}}{d\Omega_i} \tag{3.6.4}$$

Ţinînd seama de faptul că în expresia lui $\Delta\rho$

$$\Delta\rho = \frac{\Delta\rho^e}{1 + \frac{|\widetilde{E}|^2}{|\widetilde{E}|^2_{sat}}\ \frac{g_L(\omega, \Omega_i)}{T_2/\pi}} \tag{3.6.5}$$

intră funcţia lui Lorentz $g_L(\omega, \Omega_i)$ şi că $\frac{dN}{d\Omega_i}$ este produsul lui $(\Delta\rho)$ cu o gaussiană, expresia (3.6.4) se reprezintă grafic, ca în figura 3.6 R.

Se observă că profilul gaussian al liniei prezintă două puncte de minim. Acest fenomen de depopulare selectivă poartă numele de „hole burning".

Unda care se propagă într-o anumită direcţie interacţionează cu moleculele de viteză dată, pe cînd unda care se propagă în direcţia opusă, va interacţiona cu molecule cu viteze de aceeaşi mărime dar de sens opus.

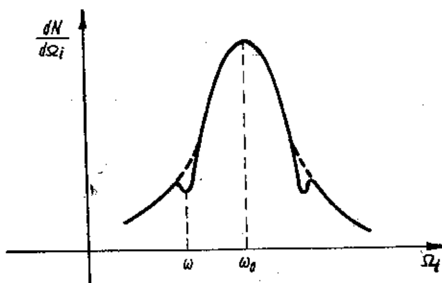


Fig. 3.6R

1°b) Din cele de mai sus rezultă că pentru a avea un singur minim trebuie ca undele care se propagă în direcţii opuse să interacţioneze cu acelaşi grup de molecule, deci să avem $\omega \approx \omega_0$.

1°c) Din expresia care dă frecvenţa de tranziţie afectată de efect Doppler

$$\Omega_i = \omega_0\left(1 + \frac{v_i}{c}\right)$$

se obţine

$$v_i = (\Omega_i - \omega_0)\frac{c}{\omega_0} \tag{3.6.6}$$

$$\mathrm{d}v_i = -\frac{c}{\omega_0}\mathrm{d}\Omega_i . \tag{3.6.7}$$

Probabilitatea ca un atom de masă m, într-un gaz de temperatură T, să aibă viteza cuprinsă intre v_x şi $v_x + \mathrm{d}v_x$ este dată de distribuţia Maxwell a vitezelor, care aplicată componentelor după o anumită direcţie este

$$P(v)\,\mathrm{d}v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v. \tag{3.6.8}$$

Din relaţiile (3.6.7) şi (3.6.8) rezultă probabilitatea ca frecvenţa emisă în direcţia μ să fie cuprinsă în intervalul Ω_i şi $\Omega_i + \mathrm{d}\Omega_i$

$$P(\Omega_i - \omega_0)\,\mathrm{d}\Omega_i = \frac{c}{\omega_0}\left(\frac{\pi}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{m}{2kT}\,\frac{c^2}{\omega_0^2}\,(\Omega_i - \omega_0)^2\right]\mathrm{d}\Omega_i. \tag{3.6.9}$$

Comparînd relaţiile (3.6.3) şi (3.6.9) şi identificînd coeficienţii exponenţialelor, rezultă ecuaţia

$$\frac{c}{\omega_0}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} = \frac{[(4/\pi)\ln 2]^{1/2}}{\Delta\omega_D} \tag{3.6.10}$$

$$\Delta\omega_D = 2\omega_0\left(\frac{2kT}{mc^2}\ln 2\right)^{1/2}. \tag{3.6.11}$$

Relaţia (3.6.11) se poate exprima şi în funcţie de lungimea de undă a radiaţiei emise

$$\frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_0} = 7{,}16\cdot 10^{-7}\left(\frac{T}{M}\right)^{1/2} \tag{3.6.12}$$

unde M este masa moleculară a gazului.

Pentru calculul lărgimii de bandă care caracterizează minimul datorită depopulării selective se foloseşte relaţia (3.6.5) care reprezintă o lorentziană.

Valoarea minimului se calculează din expresia

$$g_L(\omega, \Omega_i) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1/T_2}{(\Omega_i - \omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}, \quad \text{pentru } \Omega_i = \omega\cdot \tag{3.6.13}$$

Rezultă

$$g_L(\omega, \Omega_i)_{max} = \frac{T_2}{\pi} \tag{3.6.14}$$

şi

$$(\Delta\rho)_{min} = \frac{\Delta\rho^e}{1 + \frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}|^2_{sat}}} \tag{3.6.15}$$

Pentru $g_L(\omega, \Omega_i) = 0$ rezultă

$$(\Delta\rho)_{max} = \Delta\rho^e. \tag{3.6.16}$$

Valoarea lui $(\Delta\rho)$ pentru frecvenţa corespunzătoare benzii de trecere va fi

$$\frac{(\Delta\rho)_{max} - (\Delta\rho)_{min}}{2} = (\Delta\rho)_{1/2}$$

$$(\Delta\rho)_{1/2} = \Delta\rho^e - \frac{\Delta\rho^e}{1 + \frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}|^2_{sat}}} = \Delta\rho^e\,\frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}|^2 + |\tilde{E}|^2_{sat}}\cdot \tag{3.6.17}$$

Punînd condiţia ca inversia de populaţie (3.6.5) să ajungă la valoarea (3.6.17) se obţine lărgimea de bandă corespunzătoare minimului

$$\Delta\rho^e \frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}|^2 + |\tilde{E}|^2_{sat}} = \frac{\Delta\rho^e}{\left(1 + \frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}|^2_{sat}}\right)\frac{1}{T_2}\frac{1/T_2}{(\Omega-\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}}$$

$$(\Omega - \omega)^2 = \frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}|^2_{sat}}\frac{1}{T_2^2} - \left(\frac{1}{T_2}\right)^2$$

$$\Delta\omega_M = \sqrt{\frac{1}{T_2^2}\left(\frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}|^2_{sat}} - 1\right)}. \qquad (3.6.18)$$

2°. Pentru calculul puterii de pompaj pe unitatea de volum, folosim expresia

$$\mathscr{P}_p = \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\frac{N^e - N_T^e}{T_1}\right) \qquad (3.6.19)$$

în care $N_T^e \approx 0$, deoarece o caracteristică importantă a laserului cu patru nivele constă în posibilitatea neglijării ocupării nivelelor care participă la tranziţia laser, la temperatura camerei (nivelul fundamental nu este implicat în tranziţie).

Pentru inversia de populaţie la echilibru vom avea

$$N^e = \int (\Delta\rho_p)^e \, d\mathscr{M} = N_0 \, (\Delta\rho)_p^e \qquad (3.6.20)$$

indicele p semnificînd pragul de oscilaţie.

Din relaţia

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{0{,}939\,\pi N_0}{\varepsilon_0\,\Delta\omega_D}\cdot\frac{K(\Delta\rho)^e}{\sqrt{1 + |\tilde{E}|^2/|\tilde{E}|^2_{sat}}} \qquad (3.6.21)$$

deducem expresia lui $(\Delta\rho)^e$

$$(\Delta\rho)^e = \frac{1}{K}\frac{\varepsilon\cdot\Delta\omega_D}{0{,}939\,\pi N_0}\frac{1}{\tau_c}\sqrt{1 + \frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}|^2_{sat}}} \qquad (3.6.22)$$

unde K are expresia din enunţ

$$K = (\omega_{12})^2 \frac{\Omega_t}{3\hbar}. \qquad (3.6.23)$$

Înlocuind în (3.6.19) se obţine

$$\mathscr{P}_p = \frac{\hbar^2 \ \varepsilon_0 \Delta\omega_D}{0{,}626\ \pi\tau_c T_1 |\overline{\mu_{12}^e}|^2}. \qquad (3.6.24)$$

Aplicaţie numerică :

$$\mathscr{P}_p = 1\ \text{mW/cm}^3.$$

3°. Pentru calculul puterii de ieşire, ţinem seama că la prag cîmpul electric este aproximativ nul ($\tilde{E} = 0$), astfel că din expresia (3.6.22) deducem valoarea inversiei de populaţie la prag

$$(\Delta\rho_e)_p = \frac{\varepsilon_0 \Delta\omega_D}{K \cdot 0{,}939\ \pi N_0} \cdot \frac{1}{\tau_c}. \qquad (3.6.25)$$

Din expresia

$$N^e = N_0 (\Delta\rho)^e \qquad (3.6.26)$$

se obţine

$$N_p^e = N_0 (\Delta\rho)_p^e. \qquad (3.6.27)$$

Introducînd (3.6.27) şi (3.6.26) în (3.6.22) se obţine

$$|\tilde{E}|^2 = |\tilde{E}|_{sat}^2 \left[\left(\frac{N^e}{N_p^e}\right)^2 - 1\right].$$

Folosindu-se expresia puterii de ieşire

$$\mathscr{P}_{0\ ies.} = \frac{\varphi \hbar\omega}{\tau_m} = \frac{\varepsilon_0 |\tilde{E}|^2}{2\tau_m} \qquad (3.6.28)$$

unde φ este proporţional cu densitatea de energie electromagnetică din cavitate, iar τ_m este timpul de viaţă al fotonului în cavitate, rezultat

din transmisia oglinzilor, rezultă puterea de ieșire a laserului pe unitatea de volum

$$\mathscr{P}_{0\,ies.} = \frac{3\varepsilon_0 \hbar^2}{\tau_m |\bar{\mu}_{12}^e|^2 T_1 T_2} \left[\left(\frac{N^e}{N_p^e}\right)^2 - 1\right]. \qquad (3.6.29)$$

Aplicație numerică:

$$\mathscr{P}_{0\,ies.} = 19 \text{ mW}.$$

4°. Lărgimea de bandă a interferometrului este determinată de fracțiunea de putere pierdută la fiecare tranzit al luminii în interferometru.

Fie $\frac{\mathscr{P}_t}{\mathscr{P}}$ pierderile relative de putere la un tranzit al luminii, și T_t — timpul de tranzit al luminii prin cavitate. Pentru calculul lărgimii de bandă, pornim de la definițiile echivalente ale factorului de calitate al cavității

$$Q = \frac{\text{frecvență de rezonanță}}{\text{banda de frecvență}} \qquad (3.6.30)$$

și

$$Q = \omega \frac{\text{energia inmagazinată în oscilator}}{\text{energia pierdută pe secundă}}. \qquad (3.6.31)$$

Egalînd cele două expresii ale lui Q rezultă banda oscilatorului

$$\frac{\omega \mathscr{P}}{\frac{\mathscr{P}_t}{T_t}} = \frac{\omega}{2\,\Delta\omega_c}$$

$$\Delta\omega_c = \frac{\mathscr{P}_t}{2\mathscr{P} T_t}, \qquad (3.6.32)$$

Aplicație numerică:

$$\Delta\nu_c = \frac{\Delta\omega_c}{2\pi} = 2\cdot 10^7 \; H_z$$

$$\Delta\nu_D = \frac{\Delta\omega_D}{2\pi} = 1{,}25\cdot 10^9 \; H_z$$

Rezultă că banda de trecere a oscilatorului este cu două ordine de mărime mai mare decît banda circuitului.

3.7. 1°. Pentru elementul de matrice ρ_{11}, ecuaţia

$$\frac{i\hbar\partial\rho_{jj}^{p}}{\partial t} = [\mathscr{H}', \rho^{(p-1)}]_{jj}$$

se scrie

$$i\hbar = \frac{\partial\rho_{jj}^{(1)}}{\partial t} = \sum_{k} (\mathscr{H}'_{jk}\, \rho_{kj}^{(0)} - \rho_{jk}^{(0)} \mathscr{H}'_{kj}) \tag{3.7.1}$$

Sistemul fiind iniţial în starea $|1>$ rezultă

$$\rho_{ij}^{(0)} = \delta_{i1\,j1} \tag{3.7.2}$$

astfel că (3.7.1) devine:

$$i\hbar\, \frac{\partial\rho_{jj}^{(1)}}{\partial t} = 0 \tag{3.7.3}$$

şi cu ajutorul lui (3.7.2) se obţine

$$\rho_{jj}^{(1)} = 0 \tag{3.7.4}$$

Deci perturbaţia de ordinul întîi a elementelor diagonale a matricii densitate duce la o probabilitate de tranziţie nulă.

Pentru calculul lui $\rho_{jj}^{(2)}$ scriem ecuaţia pentru perturbaţia de ordinul doi

$$i\hbar\, \frac{\partial\rho_{jj}^{(2)}}{\partial t} = \sum_{k} (\mathscr{H}'_{jk}\, \rho_{kj}^{(1)} - \rho_{jk}^{(1)}\, \mathscr{H}'_{kj}) = \mathscr{H}'_{j1}\, \rho_{1j}^{(1)} - \rho_{j1}^{(1)}\, \mathscr{H}'_{1j} \tag{3.7.5}$$

Calcularea elementelor de forma $\rho_{i1}^{(1)}$ se face folosind ecuaţia

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{ij} + \frac{1}{\tau_{ij}}\right) \rho_{ij}^{(1)} = \sum_{k} (\mathscr{H}'_{ik}\, \rho_{kj}^{(0)} - \rho_{ik}^{(0)}\, \mathscr{H}'_{kj}), \quad i \neq j \tag{3.7.6}$$

scrisă sub forma

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{i1} + \frac{1}{\tau_{i1}}\right) \rho_{i1}^{(1)} = \mathscr{H}'_{i1}. \tag{3.7.7}$$

Ţinînd seama de $\mathscr{H}' = \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'}{2}(\exp[i\omega t] + \exp[-i\omega t])$ căutăm pentru $\rho_{i1}^{(1)}$ o soluţie armonică de forma

$$\rho_{i1}^{(1)} = \tilde{\rho}\,(\exp[i\omega t] + \exp[-i\omega t]) \tag{3.7.8}$$

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{i1} + \frac{1}{\tau_{i1}}\right)\tilde{\rho}\,(\exp[i\omega t] + \exp[-i\omega t] =$$

$$= \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'}{2}\exp[i\omega t] + \exp[-i\omega t]).$$

$$i\hbar\left(i\omega + i\omega_{i1} + \frac{1}{\tau_{ij}}\right)\tilde{\rho}\exp[i\omega t] + i\hbar\left(-i\omega + i\omega_{i1} + \frac{1}{\tau_{ij}}\right)\exp[-i\omega t]\,\tilde{\rho} =$$

$$= \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'}{2}(\exp[i\omega t] + \exp[-i\omega t].$$

Considerînd pe rînd egalitatea termenilor de fază $i\omega t$ şi $-i\omega t$, rezultă

$$\tilde{\rho} = \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'}{2i\hbar\left(i\omega + i\omega_{i1} + \frac{1}{\tau_{i1}}\right)} \tag{3.7.9}$$

şi respectiv

$$\tilde{\rho} = \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'}{2i\hbar\left(-i\omega + i\omega_{i1} + \frac{1}{\tau_{i1}}\right)}. \tag{3.7.10}$$

Introducînd în (3.7.8) expresiile (3.7.9) şi (3.7.10) se obţine

$$\rho_{i1}^{(1)} = \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'_{i1}\exp[i\omega t]}{2i\hbar\left(i\omega + i\omega_{i1} + \frac{1}{\tau_{i1}}\right)} + \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'_{i1}\exp[i\omega t]}{2i\hbar\left(-i\omega + i\omega_{i1} + \frac{1}{\tau_{i1}}\right)}. \tag{3.7.11}$$

Cu ajutorul lui (3.7.11) şi ţinînd seama de forma excitaţiei

$$\widetilde{\mathscr{H}}'_{1j} = \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'_{1j}}{2}(\exp[i\omega t] + \exp[-i\omega t] \tag{3.7.12}$$

relaţia (3.5.7) se scrie

$$\left[\frac{i\hbar\,\partial\overline{\rho}_{jj}^{(2)}}{\partial t}\right] = \frac{i\,|\widetilde{\mathscr{H}}_{j1}|^2}{2\hbar\,\tau_{j1}}\,\frac{1}{(\omega - \omega_{j1})^2 + \left(\frac{1}{\tau_{j1}}\right)^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_{j1})^2 + \left(\frac{1}{\tau_{j1}}\right)^2}. \tag{3.7.13}$$

La rezonanță $\omega \approx \omega_{j1}$ și primul termen din paranteză devine foarte mare, deci e vorba de un proces de absorbție a unui singur foton. Notînd probabilitatea de tranziție cu $W_{(1)}$ obținem expresia

$$W_{(1)} = \left[\frac{\overline{\partial \rho_{jj}^{(2)}}}{\partial t} \right] = \frac{|\widetilde{\mathscr{H}}'_{j1}|^2}{2\hbar^2} \frac{1/\tau_{j1}}{(\omega - \omega_{j1})^2 + \left(\frac{1}{\tau_{j1}}\right)^2} \tag{3.7.14}$$

cu condiția ca $\omega \approx \omega_{j1}$ astfel ca termenul al doilea să devină neînsemnat în comparație cu primul, sau

$$W_{(1)} = \frac{|\widetilde{\mathscr{H}}'_{j1}|}{2\hbar^2} \pi g_L(\omega) \tag{3.7.15}$$

unde

$$g_L(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{\tau_{j1}}}{(\omega - \omega_{j1})^2 + \left(\frac{1}{\tau_{j1}}\right)^2} \tag{3.7.16}$$

este funcția de formă (lorentziană) a liniei spectrale.

2°. Deoarece medierea s-a făcut pe o perioadă lungă în comparație cu cea a perturbației armonice aplicate, trebuie ca timpul de tranziție să fie mult mai mare decît perioada perturbației.

Definind timpul de tranziție ca inversul probabilității de tranziție, rezultă condiția

$$\frac{2\pi}{\omega} \ll \frac{1}{W}. \tag{3.7.17}$$

Introducînd pe W din (3.7.15) se obține

$$\frac{|\widetilde{\mathscr{H}}'_{j1}|^2}{\hbar^2} \frac{\pi^2 g_L(\omega)}{\omega} \ll 1. \tag{3.7.18}$$

3°. Lărgimea de bandă e definită ca intervalul de frecvență determinat de profilul lorentzian al liniei pentru care $g_L(\omega)$ se reduce la jumătate, din valoarea la rezonanță

$$g_L(\omega)_{rez} = \frac{\tau_{j1}}{\pi} \tag{3.7.19}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_{j1}}{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{\tau_{j1}}}{(\omega - \omega_{j1})^2 + \left(\frac{1}{\tau_{j1}}\right)^2}$$

cu

$$B = 2\ \Delta\omega = 2\omega - \omega_{j1}) \qquad (3.7.20)$$

$$\Delta\omega^2 + \left(\frac{1}{\tau_{j1}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\tau_{j1}}\right)^2$$

$$B = \frac{2}{\tau_{j1}}. \qquad (3.7.21)$$

Observație. Ținînd seama de teoria proceselor rezonante, din (3.7.21) rezultă că τ_{j1} este identic cu timpul de relaxare spin-spin (transversal) pentru elementele matricii densitate, T_2.

4°. În cazul tranzițiilor de dipol electric

$$\mathscr{H}' = -\overline{\mu}^e \bar{E} = -\mu_\alpha^e E_\alpha = \mu_x^e E_x + \mu_y^e E_y + \mu_z^e E_z. \quad (3.7.22)$$

unde μ_α^e sînt proiecțiile după x, y, z, pentru momentul dipol electric iar E_α, proiecțiile cîmpului electric corespunzător.

Operatorului dipol electric, i se asociază matricea

$$\mu_\alpha^e = \begin{pmatrix} 0 & \mu_\alpha^e \\ \mu_\alpha^{e*} & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.7.23)$$

datorită regulilor de selecție cu privire la tranzițiile de dipol (se produc numai între stări parități opuse), astfel că $\mathscr{H}'$ devine

$$\mathscr{H}' = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_\alpha^e E_\alpha \\ -\mu_\alpha^{e*} E_\alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.7.24)$$

Considerînd un mediu izotrop, momentul de dipol va avea aceeași direcție cu cîmpul aplicat.

În acest caz

$$|\overline{\mu}_{12}^e|^2 = |\overline{\mu}_x^e|^2 + |\overline{\mu}_y^e|^2 + |\overline{\mu}_z^e|^2 = 3\,|\overline{\mu}_x^e|^2$$

astfel că

$$|\overline{\mu}_\alpha^e|^2 = \frac{|\overline{\mu}_{12}^e|^2}{3}. \qquad (3.7.25)$$

Rezultă

$$|\mathscr{H}'_{21}|^2 = \frac{|\overline{\mu}^e_{12}|^2}{3} \, |\widetilde{E}|^2 \tag{3.7.26}$$

şi

$$W_{(1)} = \frac{|\overline{\mu}^e_{12}|^2 |\widetilde{E}|^2}{6\hbar^2} \pi \, g_L(\omega). \tag{3.7.27}$$

4°. Din (3.7.19) rezultă

$$g_L(\omega)_{rez} = \frac{T_2}{\pi} \tag{3.7.28}$$

$$W_{(1)} = \frac{|\overline{\mu}^e_{12}|^2}{6\hbar^2} \, T_2 \, |\widetilde{E}|^2. \tag{3.7.29}$$

Comparînd (3.7.29) cu ecuaţia

$$\dot{N} + \frac{N - N^e}{T_1} = - \frac{T_2}{\hbar^2} \, \frac{|\mu^e_{12}|^2}{3} N \, |\widetilde{E}|^2$$

rezultă

$$\dot{N} + \frac{N - N^e}{T_1} = - 2NW \tag{3.7.30}$$

$$5°. \; W_{(1)} = \frac{|\overline{\mu}_{12}|^2 |\widetilde{E}|^2}{6\hbar^2} \pi \, g_L(\omega)_{rez}$$

$$W_{(1)} = \frac{(3{,}33)^2 \cdot 10^{-60} \cdot 10^{-12} \cdot \pi \, |\widetilde{E}|^2}{6\left(\dfrac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2\pi}\right)^2} = \frac{4\pi^3 \cdot 10{,}1 \cdot 10^{-72} |\widetilde{E}|^2}{2 \cdot 64 \cdot 10^2 \cdot 10^{-68}} =$$

$$= 10^{-5} |\widetilde{E}|^2 \; \mathrm{s}^{-1}.$$

Din (3.7.28) rezultă

$$T_2 = \pi g_L(\omega)_{rez} \approx 3 \cdot 10^{-12} \; \mathrm{s}.$$

$$B = \frac{2}{T_2} = \frac{2}{3 \cdot 10^{-12}} = 0{,}66 \cdot 10^{12} \; \mathrm{Hz}.$$

3.8. 1°. Presupunem că din expresia

$$P = \chi E(1 + a_1 E + a_2 E^2 + \dots) \tag{3.8.1}$$

numai primii doi termeni intervin în relația care descrie cristalul considerat

$$P = \chi E(1 + a_1 E). \tag{3.8.2}$$

Iluminînd cristalul cu radiația de frecvență ω, acesta este supus la un cîmp electric de intensitate

$$E = E_0 \sin \omega t. \tag{3.8.3}$$

Considerînd relația (3.8.3), (3.8.2) devine

$$P = \chi E_0 \sin \omega t + \chi a_1 E_0^2 \sin^2 \omega t =$$

$$= \chi E_0 \sin \omega t + \frac{1}{2} \chi a_1 E_0^2 (1 - \cos 2\omega t). \tag{3.8.4}$$

Din relația (3.8.4) se observă că la ieșirea din cristal găsim radiația de frecvență egală cu frecvența radiației incidente și o nouă radiație de frecvență 2 ω numită armonica a doua.

2°. La distanța x de fața de intrare a lamei cristaline, intensitatea cîmpului electric va fi

$$E_x = E_0 \sin (\omega t - \varphi_1) = E_0 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi n_1}{\lambda} x \right) =$$

$$= E_0 \sin (\omega t - K_1 x). \tag{3.8.5}$$

Cîmpul electric al undei de polarizare

$$E_2 = \frac{1}{2} \chi a_1 E_0^2 \cos 2\omega t \tag{3.8.6}$$

pentru armonica a doua, va fi proporțional cu

$$\cos 2(\omega t - \varphi_1). \tag{3.8.7}$$

Considerînd un element de grosime $\mathrm{d}x$ din lama cristalină, acesta va produce la momentul t — pe fața de ieşire a lamei cristaline — cîmpul electric care este proporţional cu

$$\cos 2[\omega(t - t') - \varphi_1]\,\mathrm{d}x, \tag{3.8.8}$$

unde t' este timpul necesar ca radiaţia de lungime de undă $\frac{1}{2}\lambda$ (armonica a doua) să parcurgă drumul $d - x$ în cristal, adică

$$t' = \frac{d - x}{v^2} \tag{3.8.9}$$

cu

$$V_2 = 2\frac{\omega}{K_2} = 2\frac{\omega}{\frac{2\pi n_{r2}}{\frac{\lambda}{2}}} = \frac{\omega\lambda}{2\pi n_{r2}}. \tag{3.8.10}$$

În expresia (3.8.10), n_{r2} este indicele de refracţie al cristalului pentru armonica a doua. Deci la ieşirea din cristal, intensitatea cîmpului va fi proporţională cu

$$\cos[2\omega t - K_2 d + (K_2 - 2K_1)x]\,\mathrm{d}x \tag{3.8.11}$$

Intensitatea cîmpului electric a armonicii a doua, dată de întreaga grosime a plăcii cristaline, la ieşirea din cristal, va fi

$$E_2 \infty \int_0^d \cos[2\omega t - K_2 d + (K_2 - 2K_1)x]\,\mathrm{d}x \infty$$

$$\infty \frac{2}{K_2 - K_1}\sin\left[\left(\frac{K_2}{2} - K_1\right)d\right]\cos\left[\omega t - \left(\frac{K_2}{2} + K_1\right)d\right] \tag{3.8.12}$$

Deci, la ieşirea din cristal, se va obţine următoarea expresie pentru intensitatea armonicii a doua

$$I_2 = I_0\left[d\,\frac{\sin\left(\frac{K_2}{2} - K_1\right)d}{\left(\frac{K_2}{2} - K_1\right)d}\right]^2 \tag{3.8.13}$$

Înlocuind pe K_1 şi K_2 cu valorile date de expresiile

$$K_1 = \frac{2\pi\, n_1}{\lambda} \tag{3.8.14}$$

şi

$$K_2 = \frac{2\pi\, n_2}{\frac{\lambda}{2}}, \tag{3.8.15}$$

rezultă

$$I_2 = I_0 \left\{ d\, \frac{\sin\left[\frac{\omega d}{c}\,(n_{r2} - n_{r1})\right]}{\frac{\omega d}{c}\,(n_{r2} - n_{r1})} \right\}^2. \tag{3.8.16}$$

Din expresia (3.8.16) se observă că efectul de dispersie ($n_{r1} \neq \neq n_{r2}$) duce la o reducere a intensităţii radiaţiei armonicii a doua. Considerînd o dispersie dată, $n_2 - n_1$, şi reprezentînd pe I_2 funcţie de $\frac{\omega d}{c}(n_{r2} - n_{r1})$, obţinem graficul din figura 3.8.R, a.

În cazul în care $\frac{\omega d}{c}(n_{r2} - n_{r1}) = \frac{\pi}{2}$, avem : $(I_2)_{\frac{\pi}{2}} = I_0\, \frac{2d}{\pi}$. În acest caz, dacă d' ar fi grosimea cristalului, dată de expresia

$$d' = \frac{\lambda}{4(n_{r2} - n_{r1})} \tag{3.8.17}$$

numită „lungime de coerenţă". Aceasta nu este realizabilă fiind de ordinul lui $\frac{\lambda}{20}$.

Din expresia (3.8.16) se observă că la $n_{r2} = n_{r1}$, intensitatea armonicii a doua este proporţională cu pătratul grosimii plăcii cristaline.

3°. În cazul cristalelor izotrope nu este posibil să avem $n_1 = n_2$, deoarece există totdeauna dispersie. Acesta este şi cazul cuarţului, după cum ne arată suprafaţa indicilor pentru razele ordinară şi extraordinară în cazul celor două armonici (fig. 3.8 R, b).

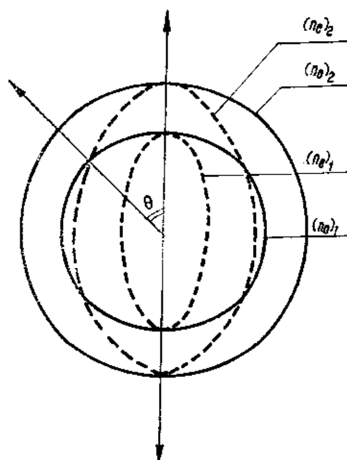


Fig. 8.8 R, *a*

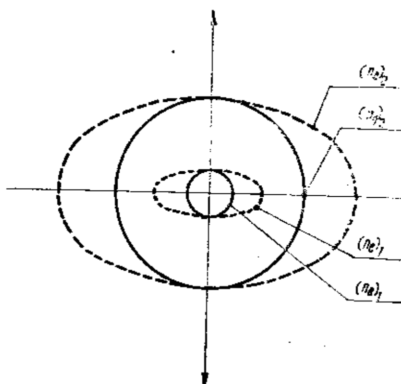


Fig. 8.8 R, *b*

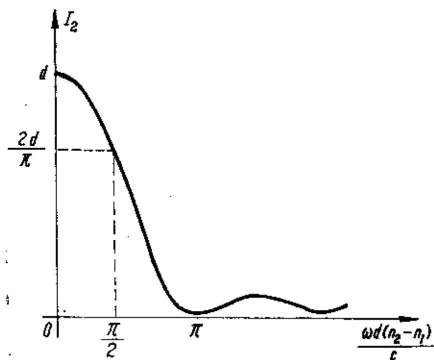


Fig. 8.8 R, c

Există, însă, cristale anizotrope pentru care, într-o anumită direcţie de propagare dată, există o egalitate între indicele de refracţie al undei ordinare pentru frecvenţa radiaţiei incidente şi indicele de refracţie al undei extraordinare pentru frecvenţa dublă (armonica a doua). Aceasta este cazul cristalului K.D.P. (fosfat deuterat de potasiu=potassium dihydrogéne phos phate) în care suprafeţele indicilor de refracţie se întretaie pentru o anumită direcţie θ de propagare (fig. 3.8. R,c).

Se observă că dacă fasciculul laser traversează cristalul K.D.P. în direcţia θ, avem

$$(n_{ro})_1 = (n_{re})_2$$

$(n_{ro})_1$ fiind indicele de refracţie ordinar pentru unda incidentă de frecvenţă ω şi $(n_{re})_2$ fiind indicele de refracţie extraordinar pentru armonica a doua de frecvenţă 2ω. Ca atare $n_{r_2} = n_{r_1}$ în expresia (3.8.16) şi se obţine pentru I_2 o valoare maximă.

3.9. Întrucît intensitatea cîmpului electric al radiaţiei cu frecvenţa fundamentală de frecvenţă ω_1 este de forma

$$E_1 \sim \sin\ (K_1 z - \omega_1 t) \tag{3.9.1}$$

polarizarea indusă la frecvenţa dublă va fi de tipul

$$P_2 \sim \sin\ (2K_1 z - 2\omega_1 t) \tag{3.9.2}$$

Dar intensitatea cîmpului armonicii a 2-a va fi de forma

$$E_2 \sim \sin\ (K_2 z - 2\omega_1 t) \tag{3.9.3}$$

unde $K_1 = \frac{\omega_1}{v_1}$, $K_2 = \frac{\omega_2}{v_2}$, v_1 şi v_2 fiind vitezele de propagare ale celor două unde. Pentru ca producerea armonicii a doua să fie efectivă trebuie ca

$$2K_1 = K_2 \tag{3.9.4}$$

adică

$$n_{r1} = n_{r2}. \tag{3.9.5}$$

În general, indicele de refracţie depinde de frecvenţă astfel încît cerinţa relaţiei (3.9.5) nu poate fi satisfăcută decît în cazuri speciale.

Astfel în cazul unui cristal uniax pozitiv relația (3.9.5) poate fi satisfăcută dacă armonica a 2-a joacă rol de undă extraordinară față de radiația incidentă care joacă rol de undă ordinară.

În acest mod se poate găsi o direcție de propagare pentru care (fig. 3.9R)

$$n_{ro1} = n_{re2}. \quad (3.9.6)$$

Se știe că viteza de propagare pentru raza extraordinară în funcție de unghiul θ făcut de direcția de propagare cu axa optică este

$$v^2(\theta) = v_0^2 \cos^2\theta + v_e^2 \sin^2\theta \quad (3.9.7)$$

sau

$$\frac{1}{n_{re1}^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_{ro1}^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_{re1}^2} \quad (3.9.8)$$

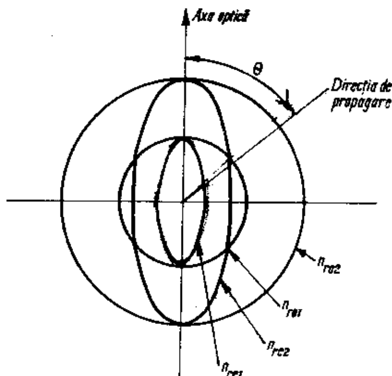


Fig. 3.9 R

și analog

$$\frac{1}{n_{re2}^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_{ro2}^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_{re2}^2}. \quad (3.9.9.)$$

Ținînd seama de relația (3.9.6) ecuația (3.9.9) devine

$$\frac{1}{n_{ro1}^2} = \frac{1 - \sin^2\theta}{n_{ro2}^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_{re2}^2}. \quad (3.9.10)$$

Rezolvînd pentru sin θ obținem

$$\sin\theta = \left(\frac{n_{re2}^2(n_{ro2}^2 - n_{ro1}^2)}{n_{ro1}^2(n_{ro2}^2 - n_{re2}^2)}\right)^{1/2}. \quad (3.9.11)$$

Cu datele din textul problemei se obține

$$\sin\theta = 0{,}82$$

ceea ce corespunde unghiului $\theta = 55°$.

3.10. 1°. Pentru a apărea un efect fotoelectric multiplu trebuie ca energia de extracţie a materialului ţintei să fie mai mare decît energia cuantei luminoase emisă de laser, iar ordinul efectului e dat de numărul întreg cel mai mare al raportului dintre valoarea energiei de extracţie şi energia fotonului, plus unu.

În cazul nostru : $\frac{\mathscr{E}_{ex}}{\hbar\omega} = \frac{4,8 \text{ eV}}{1,78 \text{ eV}} = 2,69$

deci ordinul efectului fotoelectric va fi

$$n = 2 + 1 = 3.$$

2°. Experienţa pentru observarea efectului fotoelectric multiplu trebuie să îndeplinească condiţia ca numărul de electroni $(N_e)_f$ ce apar ca rezultat al efectului fotoelectric multiplu să depăşească numărul de electroni $(N_e)_T$ ce apar ca urmare a încălzirii ţintei, datorită absorbţiei monofotonice a radiaţiei.

Îndeplinirea condiţiei $(N_e)_f \gg (N_e)_T$ se poate realiza prin micşorarea duratei impulsului radiaţiei τ şi mărirea intensităţii I.

Dacă notăm prin w_T probabilitatea de apariţie a termoelectronilor în unitatea de timp şi prin w_f probabilitatea corespunzătoare pentru efectul fotoelectric multiplu, atunci pentru numărul total de particule, emise în timpul, există relaţiile

$$(N_e)_T \sim w_T[T(I,\ \tau)]\tau \tag{3.10.1}$$

şi

$$(N_e)_f \sim w_f\tau \sim I^n\tau. \tag{3.10.2}$$

Deoarece fenomenul de termoemisie are un caracter monofotonic, micşorarea lui τ şi mărirea lui I permite ca raportul

$$\beta = \frac{(N_e)_T}{(N_e)_f} \sim \frac{w_T(I,\tau)}{w_f}$$

să devină oricît de mic, adică să atingă o astfel de situaţie încît rolul dominant în procesul de apariţie al electronilor liberi pe suprafaţa metalului să-l joace efectul fotoelectric multiplu.

Lungimea critică a impulsului laser τ_{cr} şi intensitatea critică corespunzătoare I_{cr}, la care se observă schimbarea rolului mecanismelor

(termic şi fotoelectric) în apariţia electronilor liberi pe suprafaţa ţintei, se pot determina din sistemul de ecuaţii

$$\tau = \tau_T(I) \tag{3.10.3}$$

$$j_n(I)\tau = q_{prag} \tag{3.10.4}$$

unde q_{prag} este valoarea de prag a sarcinii emise de unitatea de suprafaţă de ţintă în procesul de emisie de fotoni (această valoare e determinată de pragul de sensibilitate al detectorului de sarcină), j_n este densitatea de curent a fotoemisiei de ordin n şi τ este lungimea impulsului radiaţiei de intensitate I în decursul căruia se observă termoemisia sarcinii de mărime βq_{prag}.

Valoarea totală a sarcinii q, emisă în timpul acţiunii impulsului de lungime τ se află integrînd expresia pentru densitatea de curent termoelectronic în intervalul de timp de la 0 la τ, cu condiţia ca pe suprafaţa probei să se realizeze temperatura

$$T = \frac{2(1-r)I}{\sigma_t}\sqrt{\frac{at}{\pi}} \tag{3.10.5}$$

unde σ_t şi a sînt conductibilitatea termică şi, respectiv, coeficientu de difuzie termică, r — coeficientul de reflecţie şi t — timpul scurl de la începutul acţiunii impulsului luminos. Din ecuaţia (3.10.4) şi ecuaţia lui Richardson pentru densitatea de curent

$$j_n = AT^3 \exp\left[-\frac{\mathcal{E}_{ex}}{KT}\right]$$

unde $\mathcal{E}_{ex}$ — lucrul mecanic de extracţie şi constanta A are expresia

$$A = \frac{4\pi k^2 em}{h^3 \mathcal{E}_{ex}}$$

se obţine pentru sarcina electrică q expresia

$$q = \frac{4\pi k^2 em\tau}{h^3 \mathcal{E}_{ex}} T^3 \exp\left[-\frac{\mathcal{E}_{ex}}{KT}\right] \tag{3.10.6}$$

unde k este constanta lui Boltzmann, e — sarcina electronului şi m — masa electronului.

Relația (3.10.6) permite determinarea dependenței $\tau_t(I)$ dacă înlocuim q prin βq_{prag} şi τ prin τ_T.

Pentru calcularea densității de curent folosim rezultatul calculului cuantic pentru efectul fotoelectric multiplu

$$j_n(I) = 2^{-3n} B \frac{em\omega^2}{\hbar} \sqrt{n} \left(\frac{\omega_l}{\omega}\right)^{2n} \tag{3.10.7}$$

unde B este o constantă adimensională egală aproximativ cu unitatea şi

$$\omega_l^2 = \frac{8\pi e^2 I}{mc\mathscr{E}_{ex}}. \tag{3.10.8}$$

Înlocuind dependința $\tau_c(I)$ şi $j_n(I)$ în sistemul de ecuații (3.10.3) şi (3.10.4) obținem pentru valorile critice ale lungimii impulsului şi intensității radiației I_{cr}, expresiile

$$T_{pcr} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\pi\omega}{D_l}\right)^n \frac{ne^2m^2\omega^2}{\hbar^2 q_{prag}^2} \left(\frac{\pi e^2 D_l}{2mc\omega^2 k(1-r)\left[\ln z + \frac{5n-6}{2n}\ln(\omega\tau_{cr})\right]}\right)^{2n}} \tag{3.10.9}$$

unde

$$z = \frac{64k^3m^4\mathscr{E}_{ex}^2 D_l^{3/2}(1-r)^3}{\hbar^3\beta q_{prag}\pi^{7/2}e^5\sigma_t^3} \left(\frac{n^2\hbar q_{prag}}{em\omega}\right)^{3/n} \tag{3.10.10}$$

şi

$$I_{cr} = \frac{mc\omega^2\mathscr{E}_{ex}}{\pi^2 c^2 n^{1/2n}} \left(\frac{\hbar q_{prag}}{em\omega^2\tau_{cr}}\right)^{1/n} \tag{3.10.11}$$

În cazul considerat, cînd n = 3

$$T_{pcr} = \frac{3\pi^3 e^2 m^2}{D_l^2 \hbar^2 q_{prag}^2 \omega^2} \left[\frac{e^2}{2mc\omega k(1-r)[\ln z + 1{,}5\ln(\omega\ \tau_{cr})[}\right]^6$$

dacă

$$z = \frac{288\, k^3 m^3 \mathscr{E}_{ex}^2 D_l^{3/2} c^3 (1-r)^3}{\pi^{9/2}\hbar^2\beta e^6\sigma_t^3\omega}$$

şi

$$I_{cr} = \frac{mc\omega^2 \mathscr{E}_{ex}}{\sqrt[6]{3\pi^2 e^2}} \sqrt{\frac{\hbar q_{prag}}{em\omega^2 \tau_{cr}}}.$$

Înlocuind valorile numerice ale mărimilor pentru cazul unei ţinte de Au şi a unui fascicul laser emis de un laser cu rubin în impulsuri se obţin valorile

$$T_{pcr} = 10^{-8}s$$

$$I_{cr} = 10^{10}\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$$

care sînt în deplină concordanţă cu rezultatele experimentale.

3.11. 1°. În cazul absorbţiei a doi fotoni, $n = 2$ şi $W_{(n)}$ devine.

$$W_{(2)} = \frac{\pi g_L(2\omega)}{2^3\hbar^4} \cdot \left| \sum_q \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'_{jq} \widetilde{\mathscr{H}}'_{q1}}{\omega - \omega_{q1}} \right|^2. \qquad (3.11.1)$$

Pentru $n = 3$, se calculează în acelaşi fel $W_{(3)}$

$$W_{(3)} = \frac{\pi g_L(3\omega)}{2^5\hbar^6} \cdot \left| \sum_{k,q} \frac{\widetilde{\mathscr{H}}'_{jq} \widetilde{\mathscr{H}}'_{qk} \widetilde{\mathscr{H}}'_{k1}}{(2\omega - \omega_{q1})(\omega - \omega_{k1})} \right|^2. \qquad (3.11.2)$$

2°. Fie o tranziţie de dipol cu absorbţia a doi fotoni din starea $|1\rangle$ în starea $|j\rangle$. Deoarece tranziţiile de dipol sînt permise numai între stări de parităţi opuse, pentru ca să existe $W_{(2)}$, deci pentru ca $\mathscr{H}'_{jq}$ şi $\widetilde{\mathscr{H}}'_{q1}$ să fie diferiţi de zero, trebuie ca $|j\rangle$ şi $|q\rangle$ să fie de parităţi opuse, de asemenea $|q\rangle$ şi $|1\rangle$.

Rezultă că $|j\rangle$ şi $|1\rangle$ au aceeaşi paritate.

3°. Dacă $|j\rangle$ şi $|1\rangle$ au parităţi opuse, atunci $|q\rangle$ e în mod obligatoriu de paritatea lui $|j\rangle$ sau $|1\rangle$. Presupunem că $|1\rangle$ şi $|q\rangle$ au parităţi opuse. În acest caz, $\widetilde{\mathscr{H}}'_{q1} \neq 0$ implică tranziţii de dipol între aceste stări. Pentru ca şi $\widetilde{\mathscr{H}}'_{jq} \neq 0$, stările $|j\rangle$ şi $|q\rangle$ avînd aceeaşi paritate, trebuie ca între aceste stări să se producă o tranziţie de cuadrupol electric, sau de dipol magnetic.

4°. În cazul stărilor de paritate mixtă, sînt posibile tranziţii de dipol electric, chiar dacă sînt implicate numai două nivele, adică $|q\rangle \equiv |1\rangle$ sau $|q\rangle \equiv |j\rangle$ deoarece acestea nu exclud partitatea opusă

a stărilor astfel încît elementele de matrice $\widetilde{\mathscr{H}}'_{ij}$ să fie diferite de zero.

5°. Analizînd probabilitatea dată de expresia (3.11.2), observăm că este diferită de zero, în cazul tranzițiilor de dipol, numai dacă $| i \rangle$ și $| j \rangle$ au parități opuse.

Rezultă și posibilitatea unui proces de absorbție a trei fotoni, într-un sistem cu două nivele, între stări de parități opuse, dacă se pune în (3.11.2) $| q \rangle \equiv | j \rangle$ și $| k \rangle \equiv | 1 \rangle$.

6°. $\sigma_c = \dfrac{\mathscr{P}}{N_v I}$.

Dacă puterea medie incidentă pe unitatea de arie pentru o undă care se propagă este

$$I = \frac{n_r \varepsilon_0 |\widetilde{E}|^2}{2} \tag{3.11.3}$$

unde n_r este indicele de refracție, iar pentru puterea medie absorbită pe unitatea de volum

$$\mathscr{P} = N_0 \hbar\, \omega_{21}\, W, \tag{3.11.4}$$

unde W este probabilitatea de tranziție pe unitatea de timp, pentru o moleculă, N_0 — numărul de molecule din unitatea de volum și ω_{21} — frecvența de tranziție, rezultă

$$\sigma_c = \frac{2\hbar\omega_{21}}{n_r \varepsilon_0 |\widetilde{E}|^2}\, W. \tag{3.11.5}$$

Cu ajutorul lui (3.11.1), calculăm $\sigma_c(2)$ pentru un proces de absorbție bifotonic, în cazul tranziției de dipol.

În problema 3.7 s-a calculat

$$|\mathscr{H}_{ij}|^2 = \frac{|\overline{\mu}^e_{ij}|^2 |\widetilde{E}|^2}{3} \tag{3.11.6}$$

Din (3.11.1), (3.11.5) și (3.11.6) rezultă $\sigma_c(2)$ pentru un sistem cu trei nivele:

$$\sigma_c(2) = \frac{\pi\omega g_L(2\omega)}{18 n \varepsilon_0 \hbar^3} \frac{|\overline{\mu}^e_{32}|^2 |\overline{\mu}^e_{21}|^2 |E|^2}{\omega - \omega_{31}}. \tag{3.11.7}$$

În mod asemănător, din (3.11.2), (3.11.5) şi (3.11.6) rezultă $\sigma_c(3)$ pentru un sistem cu două nivele

$$\sigma_c(3) = \frac{3\pi\omega\, g_L(3\omega)}{16\hbar^5 n_r \varepsilon_0}\left(\frac{|\bar{\mu}^e_{21}|^2}{3}\right)^3 \frac{|E|^4}{[2\omega(\omega-\omega_{21})]^2}, \qquad (3.11.8)$$

$$\sigma_c(2) = \frac{\pi\cdot 10^{16}\cdot 10^{-2}(3{,}4)^4\cdot 10^{-120}\cdot|\widetilde{E}|^2}{18\cdot\frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot\frac{(6{,}62)^3\cdot 10^{-102}}{(2\pi)^3}\cdot 10^{32}} =$$

$$= (2\pi)^3\cdot 10^{-35}|\widetilde{E}|^2\,\mathrm{m}^2,$$

$$\sigma_{c(3)} = \frac{3\pi\cdot 10^{16}\cdot 10^{-12}}{16(6{,}62)^5\frac{(10^{-34})^5}{(2\pi)^5}\cdot\frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}}\left(\frac{(3{,}33\cdot 10^{-30})^6}{3^3}\right)\frac{|\widetilde{E}|^4}{2\cdot 10^{16}(10^{16}-2\cdot 10^{-14})} \approx$$

$$\approx \pi^3\cdot 10^{-53}|\widetilde{E}|^2\,\mathrm{m}^2$$

3.12. 1°. În urma transformării χ devine

$$\chi' = A\chi A^{-1} \qquad (3.12.1)$$

Dacă A corespunde unei simetrii (3.12.1) se scrie

$$\begin{aligned}\chi &= A\chi A^{-1}\\ \chi A &= A\chi A^{-1}A\\ \chi A &= A\chi\\ \chi A - A\chi &= 0\\ [A,\chi] &= 0\end{aligned} \qquad (3.12.2)$$

2°. Legătura între coordonate este dată de figura 3.12.R

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Rezultă

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } \chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{xy} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{xz} & \chi_{yz} & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

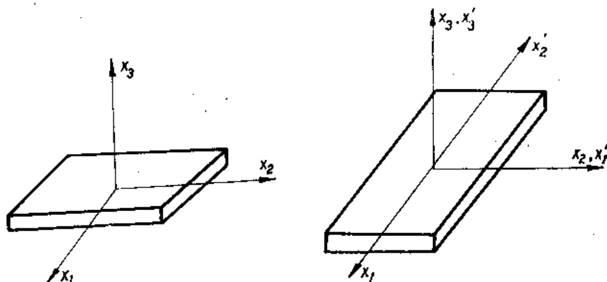


Fig. 3.12 R *a, b*

Introducînd pe A și χ în (3.12.2) se obține

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{xy} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{xy} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zz} & \chi_{yz} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se obțin nouă ecuații, din care șase independente.
Rezultă

$$-\chi_{xy} = \chi_{xy} \text{ care implică } \chi_{xy} = 0$$

și

$$-\chi_{yy} = \chi_{xx},$$

de unde

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}, \text{ deci mediu uniax.}$$

3.13. Dacă A_j este amplitudinea de oscilație a celui de al j-lea mod optic, atunci ecuațiile care descriu stările mediului au expresiile

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1 + \omega_1^2 \dot{A}_1 + \gamma_1 A_1 &= z_1 E \\ \ddot{A}_2 + \omega_2^2 \dot{A}_2 + \gamma_2 A_2 &= z_2 E \\ &\vdots \\ \ddot{A}_n + \omega_n^2 A_n + \gamma_n A_n &= z_n E \end{aligned} \qquad (3.13.1)$$

$$P = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \ldots + \alpha_n A_n + \alpha_\infty E$$

unde ω_j^2, γ_j și z_j, sînt respectiv forța elastică, coeficientul de amortizare și sarcina specifică, corespunzătoare modului j, E — cîmpul electric macroscopic, P — polarizarea cristalului, α_j — sarcina specifică din unitatea de volum, α_∞ — polarizarea la înaltă frecvență a cristalului, ce depinde doar de starea electronilor.

În aproximația undelor plane

$$P,\ E,\ A_1, \ldots, A_n \sim e^i(\omega t + kx)$$

de unde se obține că

$$P = \left[\frac{\alpha_j z_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\gamma_j\omega} + \alpha_\infty \right] E. \qquad (3.13.2)$$

Constanta dielectrică se poate determina din relația de dispersie clasică

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{P}{E} = \varepsilon_0 + \alpha_\infty + \sum_j \frac{\alpha_j z_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\,\gamma_j\omega} =$$

$$= \varepsilon_\infty + \sum_j \frac{\dfrac{\alpha_j z_j}{\omega_j^2} \cdot \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\,\gamma_j\omega} = \varepsilon_\infty + \sum_j \frac{s_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \qquad (3.13.3)$$

unde $\varepsilon_\infty = \varepsilon_0 + \alpha_\infty$ este constanta dielectrică la înaltă frecvență și $s_j = \frac{\alpha_j z_j}{\omega_j^2}$ este intensitatea admimensională a modului j. În uni-

tăți de intensitate admimensională, constanta dielectrică la frecvență joasă ($\omega = 0$) e egală cu

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_\infty + \sum_j \frac{s_j\omega_j^2}{\omega_j^2} = \varepsilon_\infty + \sum_j s_j. \tag{3.13.4}$$

La ecuațiile (3.13.1), care descriu stările mediului, trebuie adăugate ecuațiile, care descriu cîmpul electromagnetic

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \bar{D} = \operatorname{div} \bar{B} = 0 \\ &\operatorname{rot} \bar{E} = -\dot{\bar{B}} \\ &\operatorname{rot} \bar{H} = \dot{\bar{D}} \\ &\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E} + \bar{P}. \end{aligned} \tag{3.13.5}$$

Trebuie să găsim soluția comună a sistemelor de ecuații (3.13.1) și (3.13.5).

Din ecuația $\operatorname{div} \bar{D} = \varepsilon \operatorname{div} \bar{E} = 0$ rezultă, $\operatorname{div} \bar{E} = 0$ deci $\bar{k} \perp \bar{E}, \bar{H}$, dacă $\varepsilon \neq 0$. Rezolvarea concomitentă a ecuațiilor (3.13.1), (3.13.5) arată, că în cristal apare o perturbație ce se propagă și a cărei frecvență depinde de vectorul de undă

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = \varepsilon_\infty + \sum_j \frac{s_j\omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j} \tag{3.13.6}$$

Această stare de perturbație se numește *polaron*.

Frecvența fotonului transversal ω_{tj} se obține ușor punînd condiția ca $k \to \infty$

$$\omega_{tj} = \pm \sqrt{\omega_j^2 - \frac{\gamma_j}{4}} + \frac{i\gamma_j}{4}. \tag{3.13.7}$$

La difuzia combinată a luminii trebuie să se respecte legile de conservare ale energiei și impulsului

$$\hbar\omega_l = \hbar\omega_s + \hbar\omega_p \tag{3.13.8}$$

$$\bar{k}_l = \bar{k}_s + \bar{k}_p \tag{3.13.9}$$

unde ω_l, ω_s, ω_p sînt respectiv frecvenţa luminii perturbatoare (laser), componentei Stokes, a luminii difuzate şi polaronului; iar $\bar{k}_l$, $\bar{k}_s$, $\bar{k}_p$, vectorii de undă corespunzători. Ecuaţia (3.13.9) se poate scrie sub forma

$$k_p^2 = k_l^2 + k_s^2 - 2k_l k_s \cos\theta \tag{3.13.10}$$

unde θ este unghiul din cristal dintre direcţiile de propagare ale radiaţiei laser şi radiaţiei difuzate.

Din ecuaţia (3.13.10) se vede că prin variaţia unghiului θ se modifică k_p şi prin urmare ω_p şi ω_s, ceea ce permite obţinerea unei frecvenţe difuzate acordabile în funcţie de unghiul θ.

Rezultatul teoretic a fost verificat experimental de J. Gelbwachs, R.H. Pantell, H.E. Puthoff, J.M. Jarborough [Appl. Phys. Lett., **14**, 258, 1969].

3.14. 1°. Valorile N^0_{norm} şi φ^0_{norm} ale variabilelor se obţin din ecuaţiile ratelor date în enunţ neglijînd $\dot{N}$ şi $\dot{\varphi}$.

Din ecuaţia,

$$\dot{\varphi} + \frac{\varphi_c}{\tau_c} = \frac{\Omega}{\hbar\varepsilon} L \frac{|\bar{\mu}^e_{12}|^2}{3} N\varphi \tag{3.14.1}$$

rezultă

$$N^0_{norm} = \frac{3\hbar\varepsilon}{\tau_c T_2 \Omega L |\bar{\mu}^e_{12}|^2}. \tag{3.14.2}$$

De asemenea, din ecuaţia

$$\dot{N} + \frac{N - N^e}{T_1} = -\frac{2\Omega T_2}{\hbar\varepsilon} L \frac{|\bar{\mu}^e_{12}|^2}{3} N\varphi \tag{3.14.3}$$

rezultă

$$\varphi^0_{norm} = \frac{\tau_c}{T_1} \frac{N^0_{norm}}{2} (N^e_{norm} - 1). \tag{3.14.4}$$

Introducînd (3.14.2) şi (3.14.4) în (3.14.1) şi (3.14.3) se obţin ecuaţiile ratelor normalizate

$$\dot{N}^0_{norm} + \frac{N_{norm} - N^e_{norm}}{T_1} = -\frac{N^e_{norm} - 1}{T_1} N_{norm}\varphi_{norm} \tag{3.14.5}$$

$$\dot{\varphi}_{norm} + \frac{\varphi_{norm}}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_c} N_{norm}\varphi_{norm}. \tag{3.14.6}$$

2°. În ecuaţia (3.14.6) termenul $\frac{\varphi_{norm}}{\tau_c}$ este rata de scădere a energiei datorită pierderilor cavităţii. Energia cîştigată în cavitate prin emisie indusă e dată de termenul din partea dreaptă, $\frac{N_{norm}\varphi_{norm}}{\tau_c}$. Pentru regim staţionar, $N_{norm} = N^e_{norm}$ şi $\dot{\varphi}_{norm} = 0$, astfel că va fi un cîştig mai mare decît pierderile dacă $N^e_{norm} > 1$, deci se obţine condiţia de prag. Aceasta se mai scrie

$$N^e_{norm} = \frac{N^e}{N^0_{norm}} > 1 \tag{3.14.7}$$

$$N > \frac{3\hbar\varepsilon}{\Omega T_2 \tau_c L\, |\bar{\mu}^e_{12}|^2}. \tag{3.14.8}$$

3°. O metodă de calcul a puterii de pompaj constă în evaluarea pierderilor de energie pe care trebuie să le înlocuiască aceasta în cazul regimului staţionar de funcţionare. Din ecuaţia (3.14.5) rezultă că diferenţa de populaţie pe unitatea de volum suferă un proces de relaxare cu constanta de timp T_1. Trebuie observat şi faptul că absorbţia unei singure cuante duce la o diferenţă de populaţie de două unităţi. În acest fel

$$\mathscr{P}_p = \frac{\hbar\,\Omega}{2}\left(\frac{N^e - N^e_T}{T_1}\right) \tag{3.14.9}$$

unde Ω determină frecvenţa de tranziţie.

La limita de oscilaţie $N^e = N^0_{norm}$, astfel încît (3.14.9) devine

$$\mathscr{P}_{p.pr} = \frac{\hbar\Omega}{2T_1}\left[\frac{3\,\hbar\varepsilon}{L\,|\bar{\mu}_{12}|^2\, T_2\Omega\tau_c} + N_{ot}\right]. \tag{3.14.10}$$

4°. Se foloseşte relaţia (3.14.2) în care se introduce expresia lui L

$$T_2 = \frac{3\,\hbar\varepsilon}{N^0_{norm}\,\Omega\tau_c L\,|\bar{\mu}^e_{12}|^2} \tag{3.14.11}$$

$$T_2 = \frac{27\,\hbar\varepsilon}{(n_r^2 + 2)^2\, N^0_{norm}\,\Omega\tau_c\,|\bar{\mu}^e_{12}|^2}. \tag{3.14.12}$$

5°. Lungimea cavității laser se poate calcula din expresia care dă pe τ_m (timpul de viață al energiei electromagnetice din cavitate datorită transmisiei oglinzilor.)

Dacă $\mathscr{E}$ este energia din cavitate la un moment dat, există relația

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \exp\left[-\frac{t}{\tau_m}\right] \tag{3.14.13}$$

unde $\mathscr{E}_0$ este energia la $t = 0$.

Coeficienții de reflexie ai oglinzilor fiind $r_1 = r_2 = r$, relația care exprimă scăderea energiei din cavitate, în urma unui drum complet, dus-întors, se poate pune sub forma

$$r^2 = \exp\left[-\frac{2n_r l}{c\tau_m}\right] \tag{3.14.14}$$

unde n_r este indicele de refracție al mediului, iar l – lungimea cavității. Rezultă

$$l = -\frac{c\tau_m \ln(r^2)}{2\,n_r}\,. \tag{3.14.15}$$

6°. Deoarece energia din cavitate $\mathscr{E}$, se reduce la zero după τ_m secunde, datorită transmisiei oglinzilor, puterea de ieșire va fi

$$\mathscr{P}_{0\,ies} = \frac{\mathscr{E}}{\tau_m} \tag{3.14.16}$$

cu $\mathscr{E} = \varphi\hbar\Omega$, unde φ este proporțională cu densitatea de energie. Considerînd pentru regim staționar, $\varphi = \varphi^0_{norm}$, rezultă pentru puterea de ieșire expresia

$$\mathscr{P}_{0\,ies} = \frac{\hbar\Omega}{\tau_m}\;\frac{\tau_c}{T_1}\;\frac{N^0_{norm}}{2}\,(N^e_{norm} - 1)\,. \tag{3.14.17}$$

4.1. 1°. Fie $\mathscr{H}_0$ hamiltonianul în absența interacțiunii și $\mathscr{H}'$ termenul de interacțiune al hamiltonianului

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}' \qquad (4.1.1)$$

unde

$$\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_{0m} + \mathscr{H}_{0f} \qquad (4.1.2)$$

$\mathscr{H}_{0m}$ corespunzînd energiei moleculei în lipsa cîmpului de radiație, iar $\mathscr{H}_{0f}$ corespunzînd cîmpului de radiație în absența moleculei. Dacă stările proprii mediului molecular sînt specificate de $|u_i\rangle$, iar stările cîmpului de $|n\rangle$ starea sistemului complet mediu-cîmp este dată de următoarea bază de vectori ortonormați

$$|u_i, n\rangle = |u_i\rangle|n\rangle \qquad (4.1.3)$$

care verifică ecuația cu funcții și valori proprii

$$(\mathscr{H}_{0m} + \mathscr{H}_{0f})|u, n\rangle = \left[\mathscr{E}_i + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\right]|u_i, n\rangle \quad i = 1, 2; \quad n = 0, 1, 2 \qquad (1.4.4)$$

deoarece

$$\mathscr{H}_{0f}|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle. \qquad (4.1.5)$$

Termenul de interacție corespunzător tranzițiilor de dipol electric va fi dat de

$$\mathscr{H}' = -\bar{\mu}\bar{E} = -\mu_\alpha E_\alpha. \qquad (4.1.6)$$

2°. Datorită alegerii bazei de vectori proprii de forma $|\mu_i, n\rangle$ se obțin pentru $\mathscr{H}'$ elemente de matrice cu patru indici, definiți astfel

$$\mathscr{H}'_{i,n',j,m} = -\langle\mu_i n|\mu_\alpha E_\alpha|\mu_j m\rangle = (\mu_\alpha)_{ij}(E_\alpha)_{mn} \qquad (4.1.7)$$

Calculăm pe rînd elementele de matrice $(\mu_\alpha)_{ij}$ și $(E_\alpha)_{mn}$.
Matricea μ_α este o matrice care nu are elemente diagonale în cazul tranzițiilor de dipol electric deoarece acestea se produc numai între

stări de parități opuse, iar calculul elementelor de matrice diagonale implică integrale de forma

$$\int u_n^*(r) r u_n(r)\, \mathrm{d}V.$$

În acest caz matricea $(\mu_\alpha)_{ij}$ va fi de forma

$$\mu_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \mu_\alpha \\ \mu_\alpha^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{unde } \mu_\alpha = (\mu_\alpha)_{12} = (\mu_\alpha)_{21}^*.$$

Pentru exprimarea elementelor de matrice ale cîmpului electric $(E_\alpha)_{mn}$, folosim expresiile elementelor de matrice ale operatorilor de creare și anihilare, pe care le introducem în expresia cîmpului electric ca funcție de acești operatori

$$(E_\alpha)_{nm} = -i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}\right)^{1/2} (E_b)_\alpha \left(\sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1} - \sqrt{m}\,\delta_{n,m-1}\right). \tag{4.1.8}$$

Calculînd expresia (4.1.7) se obține

$$\mathscr{H}'_{1,n;2,n-1} = i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \mu_\alpha (E_b)_\alpha \sqrt{n} \tag{4.1.9}$$

$$\mathscr{H}'_{2,n;1,n-1} = i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \mu_\alpha^* (E_b)_\alpha \sqrt{n} \tag{4.1.10}$$

$$\mathscr{H}'_{1,n;2,n+1} = -i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \mu_\alpha (E_b)_\alpha \sqrt{n+1} \tag{4.1.11}$$

$$\mathscr{H}'_{2,n;1,n+1} = -i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}\right)^{1/2} \mu_\alpha (E_b)_\alpha \sqrt{n+1}. \tag{4.1.12}$$

Elementele de matrice care implică alte stări în afară de două stări adiacente, se anulează.

3°. Elementele matricea densitate vor fi definite de expresia :

$$\rho_{i,n;j,m} = \langle \mu_i, n \,|\, \rho \,|\, w_j, m \rangle = \langle \mu_i | \langle n | \rho | \mu_j \rangle | m \rangle = \rho_{i,n;j,m} \tag{4.1.13}$$

Elementele diagonale $\rho_{i,n;i,n}$ vor fi legate de probabilitatea ca mediul să fie în starea $|\mu_i\rangle$ și cîmpul să fie în starea $|n\rangle$ simultan. Pornind de aici, putem calcula probabilitatea totală ca să avem cîmpul în starea $|n\rangle$.

$$\rho_{nn} = \sum_i \rho_{i,n;i,n} \tag{4.1.14}$$

și probabilitatea totală ca molecula să fie în starea $|\mu_i\rangle$

$$\rho_{ii} = \sum_n \rho_{i,n;i,n}. \tag{4.1.15}$$

Putem acum trece la transcrierea ecuațiilor de mișcare pentru elementele matricii densitate în limbaj cuantic

$$i\hbar\,\rho_{i,n;j,m} - \hbar\,\omega_{i,n;j,m}\,\rho_{i,n;j,m} + \frac{i\hbar}{\tau_{i,n;j,m}} = [\mathscr{H}', \rho]_{i,n;j,m} \tag{4.1.16}$$

$$i = 1,2$$

$$j = 1,2$$

$$n,m = 0,\ 1,\ 2 \ldots\ i,\ n \neq j,m$$

și

$$i\hbar\,\rho_{i,n;i,n} + \frac{i\hbar}{T_{i,n;i,n}}\,(\rho_{i,n;i,n} - \rho^e_{i,n;i,n}) = [\mathscr{H}', \rho]_{i,n;i,n} \tag{4.1.17}$$

$$i = 1,2$$

$$n = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$

cu notația

$$\hbar\,\omega_{i,n;j,m} = \mathscr{E}_i - \mathscr{E}_j + (n - m)\,\hbar\omega. \tag{4.1.18}$$

4°. În teoria semicuantică a laserilor se folosesc ecuațiile ratelor sub forma

$$\dot{N} + \frac{N - N^e}{T_1} = -2\,\frac{\Omega T_2}{\hbar\varepsilon}\,L\,\frac{|\bar{\mu}^e_{12}|^2}{3}\,N\varphi \text{ pentru populații} \tag{4.1.19}$$

şi

$$\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{\tau_c} = \frac{\Omega T_2}{\hbar\varepsilon} L \frac{\overline{|\mu_{12}^e|^2}}{3} N\varphi \tag{4.1.20}$$

pentru cîmp, unde mărimile pentru descrierea comportării substanţei şi cîmpului sînt diferenţa de populaţie pe unitatea de volum N şi densitatea de energie electromagnetică φ.

În deducerea ecuaţiilor cuantice ale ratelor, folosind rezultatele de mai sus, vom considera ca variabile corespondente, numărul de fotoni pe mod $\langle n\rangle$ pentru φ şi numărul de molecule (atomi) din cavitate N_t pentru N.

a) *Deducerea ecuaţiei ratelor pentru fotoni* :

Din relaţia care defineşte pe n ca operator, $n = a^+a$, luînd valoarea medie, rezultă

$$\langle n\rangle = \text{Urmă } (\rho\, a^+a) = \sum_n n\,\rho_{nn}. \tag{4.1.21}$$

În ecuaţia de mişcare pentru operatorul numărului de fotoni va interveni derivata

$$\frac{d}{dt}\langle n\rangle = \sum_n n\,\dot{\rho}_{nn}. \tag{4.1.22}$$

Datorită faptului că a fost considerat un sistem atomic cu două stări energetice nedegenerate, de parităţi opuse $|u_1\rangle$ şi $|u_2\rangle$ relaţia (4.1.22) devine, ţinînd seama de (4.1.14)

$$\frac{d}{dt}(\langle n\rangle) = \sum_n \sum_i \rho_{i,n;i,n} = \sum_n n(\dot{\rho}_{1,n;1,n} + \dot{\rho}_{2,n;2,n})$$

Elementele de matrice $\rho_{1,n;i,n}$ şi $\rho_{2,n;2,n}$ le deducem folosind relaţiile (4.1.16), (4.1.17) şi (4.1.18).

Pentru calculul lui $[\mathscr{H}', \rho]_{i,n;i,n}$ observăm că există două posibilităţi de cuplare a stărilor, datorită faptului că nu s-au pre-

cizat care din stările $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ corespund stării superioare. Aceste posibilități sînt :

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ |1,\ n\rangle \to |2,\ n-1\rangle \\ &\text{b)}\ |1,\ n\rangle \to |2,\ n+1\rangle \end{aligned} \qquad (4.1.24)$$

Matricele $\mathscr{H}'$ și ρ corespunzătoare vor fi

$$\text{a)}\ \mathscr{H}' = \begin{bmatrix} 0 & \mathscr{H}_{1,n:2,n-1} \\ \mathscr{H}_{2,n-1:1,n} & 0 \end{bmatrix}; \quad \rho = \begin{bmatrix} \rho_{1,n:1,n} & \rho_{1,n:2,n-1} \\ \rho_{2,n-1:1,n} & \rho_{2,n-1:2,n-1} \end{bmatrix} \qquad (4.1.25)$$

$$\text{b)}\ \mathscr{H}' = \begin{bmatrix} 0 & \mathscr{H}_{1,n:2,n+1} \\ \mathscr{H}_{2,n+1:1,n} & 0 \end{bmatrix}; \quad \rho = \begin{bmatrix} \rho_{1,n:1,n} & \rho_{1,n:2,n+1} \\ \rho_{2,n+1:1,n} & \rho_{2,n+1:2,n+1} \end{bmatrix} \qquad (4.1.26)$$

Presupunînd că se produce cazul (a) vom avea

$$[\mathscr{H}', \rho]_{1,n:1,n} = \mathscr{H}'_{1,n:2,n-1}\ \rho_{2,n-1:1,n} - (\mathscr{H}'_{1,n:2,n-1}\rho_{2,n-1:1,n})^* \quad (4.1.27)$$

Introducînd (4.1.27) în (4.1.17) obținem :

$$\dot{\rho}_{1,n:1,n} + \frac{1}{T_{1,n:1,n}}(\rho_{1,n:1,n} - \rho^e_{1,n:1,n}) =$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left[\mathscr{H}'_{1,n:2,n-1}\rho_{2,n-1:1,n} - (\mathscr{H}'_{1,n,2,n-1}\rho_{2,n-1:1,4})^*\right] \quad (4.1.28)$$

$$\dot{\rho}_{2,n:2,n} + \frac{1}{T_{2,n:2,n}}(\rho_{2,n:2,n} - \rho^e_{1,n:1,n}) =$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left[\mathscr{H}'_{2,n:1,n+1}\rho_{1,n+1:2,n} - (\mathscr{H}'_{2,n-1:1,n+1}\rho_{1,n+1:2,n})^*\right]. \quad (4.1.29)$$

Se observă că $\dot{\rho}_{1,n:1,n}$, $\dot{\rho}_{2,n:2,n}$ depind de elementele nediagonale ale matricii densitate care verifică ecuația (4.1.16).

Pentru calculul lor folosim această ecuație. Rezolvînd ecuația omogenă (4.1.16) găsim o oscilație amortizată după o exponențială

pentru dependența de timp a elementelor de matrice $\rho_{i,n;j,m}$ cu frecvența dată de relația (4.1.18).
Ca urmare, pentru ecuația neomogenă, la această soluție se adaugă o soluție particulară datorită membrului drept, aceasta avînd o contribuție importantă numai pentru frecvențe apropiate de frecvența de rezonanță. Deoarece elementele lui $\mathscr{H}'$ sînt independente de frecvență și presupunînd că frecvența de oscilație a elementului de matrice $\rho_{k,p;l,q}$ este $\omega_{k,p;l,q}$ vom reține din partea dreaptă numai acei termeni care îndeplinesc condiția

$$\mathscr{E}_k - \mathscr{E}_l + (p - q)\hbar\omega \approx \mathscr{E}_i - \mathscr{E}_j + (n - m)\hbar\omega \qquad (4.1.30)$$

care pentru elementele de matrice diagonale devin

$$\mathscr{E}_k - \mathscr{E}_l + (p - q)\hbar\omega = 0 \qquad (4.1.31)$$

Din cele prezente mai sus deducem că variația în timp a elementelor de matrice, este mult mai rapidă decît timpul de amortizare,

$$(\partial/\partial t \ll 1/\tau_{i,n;j,m}) \qquad (4.1.32)$$

și prin analogie cu ecuațiile ratelor din teoria semicuantică putem identifica constanta $\tau_{i,n;j,m}$ cu timpul de relaxare transversal T_2. În acest caz (4.1.32) devine

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ll \frac{1}{T_2}\right) \qquad (4.1.33)$$

cunoscută de la studiul semicuantic al ecuațiilor ratelor pentru laseri.

Particularizînd pentru cazul studiat se obține pentru $\rho_{2,n-1;1,n}$ frecvența de oscilație

$$\omega_{2,n-1;1,n} = \Omega - \omega \simeq 0 \qquad (4.1.34)$$

Calculul comutatorului $[\mathscr{H}'_1, \rho]_{k,n;j,m}$ se face folosind matricile (4.1.25) și (4.1.26) din care reținem elementele nediagonale.

Cu ajutorul condiției (4.1.33) primul termen din (4.1.16) se poate neglija în raport cu al treilea, și ținînd seama de (4.1.34) se obține

$$\rho_{2,n-1;1,n} = \frac{\mathscr{H}'_{2,n-1;1,n}/\hbar}{(\omega - \Omega) + i/\tau_{2,n-1;1,n}} (\rho_{1,n;1n} - \rho_{2,n-1;2,n-1}) \quad (4.1.35)$$

și

$$\rho_{1,n+1;2,n} = \frac{\mathscr{H}'_{1,n+1;2,n}/\hbar}{(\Omega - \omega) + i/\tau_{1,n+1;2,n}} (\rho_{2,n;2,n} - \rho_{1,n+1;1,n+1}). \quad (4.1.36)$$

Introducîndu-se în relația (4.1.23) cu rezultatele date de (4.1.35), (4.1.36), (4.1.38) și (4.1.39), se obține

$$\frac{d}{dt}\langle n \rangle + \frac{\langle n \rangle - \langle n \rangle^e}{\tau_c} = \frac{2\pi}{\hbar^2} g_L(\omega, \Omega) \times$$

$$\times \sum_n n[|\mathscr{H}'_{1,n;2,n-1}|^2 (\rho_{2,n-1;2,n-1;} - \rho_{1,n;1,n}) -$$

$$- |\mathscr{H}'_{2,n;1,n+1}|^2 (\rho_{1,n+1;1,n+1;} - \rho_{2,n;2,n})] \quad (4.1.37)$$

unde am folosit notația

$$g_L(\omega, \Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\Omega - \omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}, \quad (4.1.38)$$

pentru lărgirea lorenziană a liniei spectrale, și am identificat constanta de timp din partea stîngă a ecuației (4.1.37) cu τ_c, deoarece ia în considerare pierderile de fotoni în cavitate datorită unor cauze diferite de intracția cîmp-substanță.

Ecuația ratelor pentru numărul de fotoni se poate aduce la o formă mai simplă, introducînd în (4.1.27) elementele de matrice (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11) și (4.1.12) și făcînd notația

$$G = \frac{\pi\omega}{\hbar\varepsilon} (\bar{\mu}_\alpha \bar{\mu}^*_\beta) (E_a)_\alpha (E_a)_\beta \cdot g_L(\omega, \Omega). \quad (4.1.39)$$

În acest fel se obține

$$\frac{d}{dt}\langle n \rangle + \frac{\langle n \rangle - \langle n \rangle^e}{\tau_c} = -G \sum_n \rho_{1,n;1,n} - \rho_{2,n;2,n}) + G\rho_{22} \qquad (4.1.40)$$

adică ecuația ratelor pentru fotoni.

b) *Ecuația ratelor pentru populații.*

Cu ajutorul lui (4.1.35) se obține expresia :

$$\rho_{11} - \rho_{22} = \sum_n (\rho_{1,n;1,n} - \rho_{2,n;2,n}) \qquad (4.1.41)$$

Dacă diferențiem expresia (4.1.31) și ținem seama de relațiile (4.1.35), (4.1.36), (4.1.38), (4.1.39), (4.1.9) și (4.1.12) în mod asemănător cu calculul făcut pentru ecuația pentru fotoni se face calculul pentru ecuația pentru populații și rezultă

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11} - \rho_{22})^e}{T_1} =$$

$$= -2G\sum_n n(\rho_{1,n;1,n} - \rho_{2,n;2,n}) + 2G\rho_{22}. \qquad (4.1.42)$$

Aceasta este ecuația ratelor pentru populații. În ecuația (4.1.42) constanta de timp care apărea în partea stîngă a fost identificată cu T_1, timpul de relaxare longitudinal, datorită faptului că reprezintă timpul necesar probabilităților de ocupare ρ_{11}, ρ_{22} să se relaxeze către valoarea de echilibru.

Pentru interpretarea diferiților termeni din ecuația (4.1.40) considerăm cazul particular în care molecula este în starea $\langle\mu_1|$. Ca urmare $\rho_{11} = 1$, $\rho_{2,n;2,n} = 0$. Ecuația (4.1.40) devine

$$\frac{d}{dt}(\langle n \rangle) + \frac{\langle n \rangle - \langle n \rangle^e}{\tau_c} = -G\langle n \rangle \qquad (4.1.43)$$

Deci proprietățile de absorbție sînt proporționale cu numărul de fotoni prezenți în cavitate. Într-adevăr, are loc numai un proces de absorbție deoarece rata de scădere a numărului de fotoni din cavitate este $G\langle n \rangle$ și sistemul se află în starea $\langle u_1|$.

În cazul în care moleculele se găsesc numai în starea $\langle u_2|$, există relațiile $\rho_{1,n;1,n} = 0$, $\rho_{22} = 1$ și ecuația ratelor devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle n \rangle + \frac{\langle n \rangle - \langle n \rangle^e}{\tau_d} = G\langle n \rangle + G\rho_{22} = G(\langle n \rangle + 1). \qquad (4.1.44)$$

Rata de creștere a numărului de fotoni din cavitate este $G(\langle n \rangle + 1)$ și are doi termeni: un termen proporțional cu $\langle n \rangle$ care reprezintă fenomenul de emisie indusă, iar altul care nu depinde de numărul de fotoni pe mod și se datorește fenomenului de emisie spontană.

Separarea interacțiunii în procese de absorbție și emisie proporționale cu numărul de fotoni $\langle n \rangle$, se poate face și dacă sistemul nu e complet în una din stările $|u_1\rangle$ sau $|u_2\rangle$, cu condiția ca stările moleculelor și cîmpului să fie independente statistic

$$\rho_{i,n;i,n} = \rho_{ii}\,\rho_{nn}. \qquad (4.1.45)$$

În acest caz ecuațiile ratelor devin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle n \rangle + \frac{\langle n \rangle - \langle n \rangle^e}{\tau c} = G(\langle n \rangle + 1)\ \rho_{22} - G\langle n \rangle\ \rho_{11} \qquad (4.1.46)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11} - \rho_{22})^e}{T_1} =$$

$$= 2G(\langle n \rangle) + 1)\ \rho_{22} - 2G\langle n \rangle\ \rho_{11}. \qquad (4.1.47)$$

O ultimă schimbare ne permite să punem ecuațiile ratelor în funcție de numărul de molecule (atomi) din cavitate N_t. Notînd $N_{t_1} = N_t\rho_{11}$, $N_{t2} = N_t\rho_{22}$, numărul de molecule (atomi) în stările $|u_1>$ și respectiv $|\mu_2\rangle$ și folosind ecuația de normare $\int E_0^2\,\mathrm{d}V_c = 1$, astfel că în locul constantei de cuplaj G putem pune constanta de cuplaj $K = \frac{G}{V_c E_0^2}$ ecuațiile ratelor se scriu

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n \rangle + \frac{\langle n \rangle - \langle n \rangle^e}{\tau_c} = K(\langle n \rangle + 1)\,N_{t2} - K\langle n \rangle\,N_{t1} \qquad (4.1.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_{t1} - N_{t2}) + \frac{(N_{t1} - N_{t2}) - (N_{t1} - N_{t2})^e}{T_1} =$$

$$= 2K(\langle n \rangle + 1)\,N_{t2} - 2K(\langle n \rangle)\,N_t. \qquad (4.1.49)$$

În concluzie. ecuațiile ratelor sub formă cuantică permit punerea în evidență a emisiei spontane.

4.2. 1°. $[b^-,\ b^+] = 1$ (4.2.1)

$$[b^-,\ b^+] = b^-b^+ - b^+b^- = 1 \tag{4.2.2}$$

$$b^-b^+ = \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega q + ip)(\omega q - ip) =$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2q^2 + p^2) - i\frac{\omega}{2\hbar\omega}(qp - pq) \tag{4.2.3}$$

$$b^+b^- = \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2q^2 + p^2) + \frac{i\omega}{2\hbar\omega}(qp - pq). \tag{4.2.4}$$

Ținînd seama de $[q,\ p] = i\hbar$, găsim relația cerută.

2°. În problema (1.4) s-a găsit pentru hamiltonianul unui rezonator expresia

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\sum_b (p_b^2 + \omega^2 q_b^2) \tag{4.2.5}$$

Pentru un singur mod de oscilație, hamiltonianul este identic cu cel al unui oscilator armonic de masă unitate

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2q^2). \tag{4.2.6}$$

Din expresiile care definesc pe b^- și b^+ găsim

$$q = \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}(b^+ + b^-) \text{ și } p = i\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}(b^+ - b^-). \tag{4.2.7}$$

Introducînd (4.2.7) în (4.2.6) și ținînd seama de (4.2.1) rezultă

$$\mathscr{H} = \hbar\omega\, b^+b^- + \frac{\hbar\omega}{2}. \tag{4.2.8}$$

De asemenea din (4.2.7) şi (4.2.1) introduse în expresiile care dau pe E şi $\bar{H}$ se obţine

$$\bar{E} = -i\left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}\right)^{1/2}\bar{E}_b(r)\,(b^+ - b^-) \tag{4.2.9}$$

$$\bar{H} = \left(\frac{\hbar\omega}{2\mu}\right)^{1/2}\bar{H}_b(r)\,(b^+ + b^-).$$

$$3^\circ.\ \mathscr{H}\,|n\rangle = \mathscr{E}_n\,|n\rangle \tag{4.2.10}$$

$$b^-\mathscr{H}\,|n\rangle = b^-\mathscr{E}_n\,|n\rangle \tag{4.2.11}$$

$$b^-\left(\hbar\omega b^+b^- + \frac{\hbar\omega}{2}\right)|n\rangle = b^-\ \mathscr{E}_n|n\rangle. \tag{4.2.12}$$

Cu ajutorul relaţiei de comutare, ţinînd seama de legea de asociativitate a operatorilor se obţine

$$b^-b^+b^- = (b^-b^+)\ b^- = (1 + b^+b^-)\ b^-. \tag{4.2.13}$$

Din (4.2.12) şi (4.2.13) rezultă

$$\mathscr{H}b^-|n\rangle = (\mathscr{E}_n - \hbar\omega)b^-|n\rangle. \tag{4.2.14}$$

Relaţia (4.2.14) arată că $b^-|n\rangle$ este un vector propriu cu valoarea proprie $\mathscr{E}_n - \hbar\omega$. Datorită acestui fapt operatorul se numeşte de anihilare.

Asemănător se demonstrează relaţia

$$\mathscr{H}b^+|n\rangle = (\mathscr{E}_n + \hbar\omega)\ b^+|n\rangle. \tag{4.2.15}$$

Deoarece operatorul b^+ transformă o funcţie de stare în alta cu o energie mai mare decît cea a stării $|n\rangle$ cu $\hbar\omega$, operatorul b^+ se numeşte de creare. Pentru a se calcula valorile proprii $\mathscr{E}_n$, aplicăm repetat asupra stărilor $|n\rangle$ operatorii b^- şi b^+. Operatorul de anihilare nu poate fi aplicat decît de un număr finit de ori, deoarece $\mathscr{E}_n \geqslant 0$. Într-adevăr

$$\mathscr{H}|n\rangle = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2q^2)|n\rangle = \mathscr{E}_n|n\rangle \tag{4.2.16}$$

Multiplicînd în ambele părţi cu $\langle n|$, unde $|n\rangle$ formează un sistem ortonormat şi ţinînd seama că p şi q sînt hermitieni, cu ajutorul operotorului identitate $I = \sum_m |m\rangle \langle m|$ se obţine

$$\frac{1}{2}(\langle n| p^2 |n\rangle + \omega^2 \langle n| q^2 |n\rangle) = \mathscr{E}_n \tag{4.2.17}$$

$$\langle n| p^2|n\rangle = \sum_m \langle n|p| m\rangle\langle m|p|n\rangle = \sum_m \langle m|p|n\rangle^* \langle m|p|n\rangle =$$

$$= \sum_m |\langle m|p|n\rangle|^2 \geqslant 0 \tag{4.2.18}$$

şi asemănător

$$\langle n|q^2|n\rangle \geqslant 0 \tag{4.2.19}$$

deci

$$\mathscr{E}_n \geqslant 0.$$

Vom nota valoarea proprie minimă cu $\mathscr{E}_0 \geqslant 0$ şi starea proprie corespunzătoare acestei valori cu $|0\rangle$. Deoarece $b^-|n\rangle$ aparţine valorii proprii $\mathscr{E}_n - \hbar\omega$, se obţine

$$b^-|0\rangle = 0 \tag{4.2.20}$$

Din (4.2.20) rezultă şi

$$\hbar\omega b^+b^-|0\rangle = 0. \tag{4.2.21}$$

Cu ajutorul lui (4.2.21), (4.2.8) devine

$$\left(\mathscr{H} - \frac{\hbar\omega}{2}\right)|0\rangle = 0. \tag{4.2.22}$$

Dar $\mathscr{H}|0\rangle = \mathscr{E}_0|0\rangle$, deci

$$\mathscr{E}_0 = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Am stabilit astfel că există o stare de energie minimă $|0\rangle$, cu valoarea proprie corespunzătoare $\mathscr{E}_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. Aplicînd succesiv operatorul b^+ de creere, găsim

$$\mathscr{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{4.2.23}$$

Acestea sînt şi valorile proprii ale energiei pentru oscilatorul armonic cuantizat. Se observă că ele formează un şir infinit şi nu sînt posibile alte stări caracterizate de energii diferite de (4.2.23).

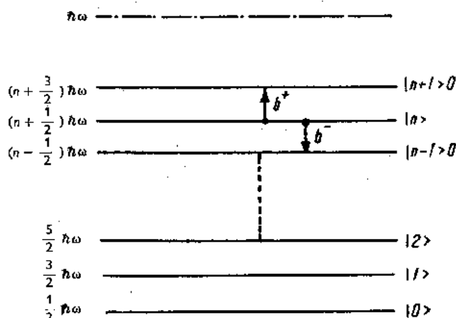


Fig. 4.2.R

În figura (4.2.R) se prezintă diagrama nivelelor de energie pentru oscilatorul armonic cuantizat. Se observă că starea $|n\rangle$ este o stare cu n fotoni.

4°. Din relaţiile

$$\mathscr{H}|n\rangle = \mathscr{E}_n|n\rangle \tag{4.2.10}$$

$$\mathscr{H} = \hbar\omega b^+b^- + \frac{\hbar\omega}{2} \tag{4.2.8}$$

$$\mathscr{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{4.2.23}$$

se arată că operatorul produs b^+b^- satisface ecuaţia cu valori proprii

$$b^+b^-|n\rangle = n|n\rangle. \tag{4.2.24}$$

Rezultă că valoarea medie $\langle b^+b^-\rangle$ este dată de n, pentru sistemul în starea $|n\rangle$ deci b^+b^- corespunde numărului de fotoni pe mod.

5°. În cazul in care nu avem o stare pură $|n\rangle$ cu n fotoni, ci un amestec de stări, vom considera în locul numărului de fotoni pe mod, valoarea medie a operatorului $\langle n\rangle$,

$$\langle n\rangle = \langle b^+b^-\rangle = \text{Urmă } (\rho b^+b^-) = \sum_{m,n} \rho_{mn}(b^+b^-)_{mn} =$$

$$= \sum_{m,n} \rho_{nm} n \delta_{mn} = \sum_n \rho_{nn} n. \tag{4.2.25}$$

În relația (4.2.24) elementul de matrice $(b^+b^-)_{mn}$ a fost obținut prin multiplicarea lui (4.2.24) cu $\langle m|$, iar ρ_{nn} este elementul matrice densitate, ρ_{nn} specificind probabilitatea de ocupare a unei stări ce conține n fotoni.

6°. Pentru a calcula matricele asociate operatorilor b^-, b^+, trebuie să determinăm constantele de normalizare A_n și C_n din relațiile

$$b^-|n> = A_n|n-1\rangle \tag{4.2.26}$$

$$b^+|n> = C_n|n+1\rangle. \tag{4.2.27}$$

Din (4.2.24) rezultă

$$b^+b^-|n\rangle = n|n\rangle = b^+A_n|n-1\rangle = A_nC_{n-1}|n\rangle \tag{4.2.28}$$

$$A_nC_{n-1} = n \tag{4.2.29}$$

$$\langle n-1|b^-|n\rangle = A_n = \langle nb^+|n-1\rangle^* = C^*_{n-1}. \tag{4.2.30}$$

Din relațiile de mai sus putem alege pe A_n și C_n astfel

$$A_n = \sqrt{n}$$

$$C_n = \sqrt{n+1}. \tag{4.2.31}$$

Cu ajutorul relațiilor (4.2.31) se obține

$$b^-|0\rangle = 0$$

$$b^-|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad n \neq 0 \tag{4.2.32}$$

$$b^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{4.2.32}$$

$$b^+b^-|n\rangle = n|n\rangle.$$

Din (4.2.32) rezultă elementele de matrice corespunzătoare operatorilor

$$b_{mn}^{-} = \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1} \qquad (4.2.33)$$

$$b_{mn}^{+} = \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}$$

şi matricele corespunzătoare

$$b^{-} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0\dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0\dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}, \quad b^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Deci matricele b^{-} şi b^{+} n-au elemente diagonale.

4.3. 1°. a) ***Calculul coeficientului de emisie spontană***, A_{21}. Din ecuaţiile ratelor

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\rangle + \frac{\langle n\rangle - \langle n\rangle^{e}}{\tau_c} = K(\langle n\rangle+1)\,N_{t_2} - k\,\langle n\rangle\,N_{t_1} \qquad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_{t1} - N_{t2}) + \frac{(N_{t1} - N_{t2}) - (N_{t1} - N_{t2})^{e}}{T_1} = 2K(\langle n\rangle+1)\,N_{t2} -$$

$$- 2K\langle n\rangle\,N_{t1} \qquad (4.3.2)$$

termenii care reprezintă emisia spontană într-un mod al cavităţii sînt

$$\frac{\partial\langle n\rangle_i}{\partial t} = KN_{t2} \qquad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_{t1} - N_{t2}) = 2KN_{t2} \qquad (4.3.4)$$

unde indicele i specifică modul cavităţii luat în considerare.

Datorită constantei de cuplaj $K = \frac{\pi\omega}{\hbar\varepsilon}\,\frac{|\bar{\mu}_{12}^{e}|^2}{3}\,g_t(\omega, \Omega)\,\frac{1}{V_c}$, care

conţine funcţia lui Lorentz pentru forma liniei g_L (ω, Ω), la tranziţie participă mai multe moduri. Acest lucru se poate arăta ţinînd seama de distanţa în frecvenţă dintre moduri şi lărgimea liniei spectrale. Ca urmare, pentru calculul coeficientului de emisie spontană vom considera toate modurile care participă la tranziţie. Numărul de fotoni care dau emisia spontană va fi dat de expresia

$$\sum_i \frac{\partial \langle n \rangle_i}{\partial t} = \sum_i K(\omega_i)\, N_{t2} \tag{4.3.5}$$

Ţinînd seama că A_{21} este definit ca probabilitatea pe unitatea de timp ca un atom în stare superioară să emită un foton, vom considera pentru A_{21} următoarea expresie

$$A_{21} = \sum_i K(\omega_i) = V_c \int_0^\infty K(\omega)\, p(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\tau_{sp}} \tag{4.3.6}$$

unde $p(\omega)\, d\omega$ reprezintă numărul de moduri pe unitatea de volum în intervalul de frecvenţă ω şi ω + dω, V_c este volumul cavităţii, $K(\omega)$ este rata de emisie spontană pentru un singur mod şi τ_{sp} — timpul de emisie spontană.

Introducînd în (4.3.6) expresiile pentru K şi $p(\omega)$

$$K(\omega) = \frac{\pi\omega}{h\varepsilon} \frac{|\vec{\mu}^e_{12}|^2}{3} g_L(\omega, \Omega) \frac{1}{V_c} \tag{4.3.7}$$

şi

$$p(\omega)\, d\omega = \frac{8\pi\omega^2 n_r^2}{c^3}\, d\omega \tag{4.3.8}$$

şi ţinînd seama că pe domeniul de frecvenţă pentru care $g_L(\omega, \Omega)$ este important, variaţiile lui $K(\Omega)$ şi $p(\omega)$ se pot neglija, prin integrarea expresiei (4.3.6) se obţine

$$A_{21} = \frac{1}{\tau_{sp}} = \frac{\Omega^2 n_r^2 |\mu^e_{12}|^2}{3\pi h \varepsilon c^3}. \tag{4.3.9}$$

În (4.3.9) s-a ţinut seama de normarea funcţiei de formă: $\int g(\omega)\, d\omega = 1$. În continuare, vom putea generaliza relaţiile (4.3.1) şi

(4.3.2) ţinînd seama de diferenţa de populaţie care apare datorită emisiei spontane în toate modurile cavităţii

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\rangle + \frac{\langle n\rangle - \langle n\rangle^{e}}{\tau_c} = -K\langle n\rangle(N_{t1} - N_{t2}) + KN_{t2} \qquad (4.3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_{t1} - N_{t2}) + \frac{(N_{t1} - N_{t2}) - (N_{t1} - N_{t2})^{e}}{T_1} + 2K\langle n\rangle\,(N_{t2} - N_{t1}) + 2A_{21}N_{t2} \qquad (4.3.11)$$

1°. b) ***Calculul coeficienţilor de absorbţie şi emisie stimulată, B_{12} şi B_{21}.***

Introducem ratele de tranziţie de pe nivelul *1* pe nivelul *2*, şi de pe nivelul *2* pe nivelul *1*, W_{12} şi W_{21} definite astfel

$$W_{12} = K\langle n\rangle \qquad (4.3.12)$$

$$W_{21} = K\langle n\rangle + A_{21} \qquad (4.3.13)$$

în concordanţă cu ecuaţiile (4.3.10) şi (4.3.11).

Ecuaţia (4.3.11) se poate scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_{t1} - N_{t2}) + \frac{(N_{t1} - N_{t2}) - (N_{t1} - N_{t2})^{e}}{T_1} = 2W_{21}N_{t2} - 2W_{12}N_{t1}. \qquad (4.3.14)$$

Vom calcula ratele de traziţie W_{12} şi W_{21} după procedeul folosit **pentru calculul** coeficientului de emisie spontană A_{21}

$$W_{12} = \sum_i K(\omega_i)\langle n(\omega_i)\rangle = V_c\int_0^{\infty} K(\omega)\,p(\omega)\,\langle n(\omega)\rangle\,\mathrm{d}\omega \qquad (4.3.15)$$

$$W_{21} = V_c\int_0^{\infty} K(\omega)\,p(\omega)\,\langle n(\omega)\rangle\,\mathrm{d}\omega + A_{21} \qquad (4.3.16)$$

Introducînd densitatea spectrală de energie $u(\omega)$ cu ajutorul relaţiei

$$u(\omega) = p(\omega)\hbar\omega\langle n(\omega)\rangle \qquad (4.3.17)$$

şi definind coeficienţii de absorbţie şi emisie indusă B_{12} şi B_{21} cu ajutorul ratelor de tranziţie W_{12} şi W_{21} se obţine

$$W_{12} = B_{12} \ u(\omega) \tag{4.3.18}$$

$$W_{21} = B_{12} \ u(\omega) + A_{21} \tag{4.3.19}$$

$$B_{12} = \frac{W_{12}}{u(\omega)} = \frac{V_c \int_0^{\infty} K(\omega) \ p(\omega) \langle n(\omega) \rangle \, \mathrm{d}\omega}{u(\omega)} \tag{4.3.20}$$

$$B_{21} = \frac{W_{21} - A_{21}}{u(\omega)} = \frac{V_c \int_0^{\infty} K(\omega) \ p(\omega) \langle n(\omega) \rangle \, \mathrm{d}\omega}{u(\omega)} \cdot \tag{4.3.21}$$

Rezultă $B_{12} = B_{21}$. Ţinînd seama de aproximaţiile făcute în (4.3.6) pentru calculul integralei, se obţine

$$B_{12} = B_{21} = \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right) V_c \int_0^{\infty} K(\omega) \, \mathrm{d}\omega \tag{4.3.22}$$

Expresia (4.3.6) se mai poate scrie

$$A_{21} = V_c \, p(\omega) \int_0^{\infty} K(\omega) \ \mathrm{d}\omega. \tag{4.3.23}$$

Făcînd raportul expresiilor (4.3.22) şi (4.3.23) rezultă

$$\frac{B_{21}}{A_{21}} = \frac{1}{\hbar\omega \, p(\omega)} = \frac{c^3}{8\pi\hbar\omega^3 n_r^3} \cdot \tag{4.3.24}$$

2°. Vom considera drept corp negru radiator, cavitatea cu mediul din interior. La echilibru termic, procesele de emisie egalează pe cele de absorbţie, astfel că numărul de molecule pe fiecare nivel rămîne constant. Datorită ecuaţiei (4.3.14), pentru regim staţionar, există relaţiile

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_{t_1} - N_{t_2}) = 0$$

$$N_{t_1} - N_{t_2} = (N_{t_1} - N_{t_2})^s$$

astfel că

$$W_{12} N_{t_1} = W_{21} N_{t_2} \tag{4.3.25}$$

Pe de altă parte, vom ţine seama de faptul că la echilibru termic, distribuţia populaţiilor pe nivele este de tip Boltzman

$$N_{t_2} = N_{t_1} \exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right]. \tag{4.3.26}$$

Introducînd (4.3.18) şi (4.3.19) în (4.3.25) se obţine

$$B_{12}\, u(\omega)\; N_{t1} = B_{21}\, u(\omega)\; N_{t2} + A_{21}\, N_{t2}. \tag{4.3.27}$$

Cu ajutorul relaţiilor, $u(\omega) = p(\omega)\; \hbar\omega\; \langle n(\omega)\rangle$,

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \hbar\omega p(\omega)$$

egalitatea (4.3.24) devine

$$\langle n(\omega)\rangle N_{t1} = (\langle n(\omega)\rangle + 1)\; N_{t2}$$

$$\langle n(\omega)\rangle N_{t1} = (\langle n(\omega)\rangle + 1)\; N_{t1} \exp\left[-\frac{\hbar\omega}{kT}\right]$$

$$\langle n(\omega)\rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right] - 1}. \tag{4.3.28}$$

Dacă se ţine seama de (4.3.17) şi (4.3.24) se găseşte pentru numărul de fotoni pe mod expresia

$$\langle n\rangle = \frac{B_{12}u(\omega)}{A_{21}}. \tag{4.3.29}$$

Din (4.3.28) şi (4.3.29) rezultă distribuţia spectrală a radiaţiei de corp negru

$$u(\omega) = \frac{8\pi\hbar\omega^3\, n_r^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right] - 1}. \tag{4.3.30}$$

3°. Considerăm un sistem atomic într-un cîmp izotrop de radiaţie, de densitate spectrală a energiei

$$u(\omega) = \frac{2\omega^2}{\pi c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right] - 1}. \tag{4.3.31}$$

Dacă în starea inferioară $|s\rangle$ sînt N_{ts} atomi, iar în starea superioară $|n\rangle$, N_{tn} atomi, la echilibru termic, atomii se distribuie pe cele două nivele, conform relaţiei lui Boltzman

$$N_{tn} = N_{ts} \exp\left[-\frac{\hbar\omega_{ns}}{kT}\right] \tag{4.3.32}$$

Fie Z_{sn} numărul tranziţiilor din starea $|s\rangle$ în starea $|n\rangle$ în intervalul de timp dt şi Z_{ns} numărul tranziţiilor în sens invers.

Numărul de tranziţii Z_{sn} va fi dat de relaţia

$$Z_{sn} = N_{ts} B_{sn}\, u(\omega_{sn})\ \mathrm{d}t. \tag{4.3.33}$$

Numărul de tranziţii Z_{ns} care determină procesele de emisie se calculează ţinînd seama şi de emisia spontană, reprezentată prin probabilitatea A_{ns} dt care nu depinde de densitatea spectrală a cîmpului de radiaţie

$$Z_{ns} = N_{tn}\, [A_{ns} + B_{ns} u(\omega_{ns})]\ \mathrm{d}t. \tag{4.3.34}$$

Deoarece sîntem la echilibru termic

$$Z_{ns} = Z_{sn} \tag{4.3.35}$$

$$N_{ts} B_{sn}\, u(\omega_{sn})\, \mathrm{d}t = N_{tn}\, [A_{ns} + B_{ns}\ u(\omega_{ns})]\ \mathrm{d}t. \tag{4.3.36}$$

Din (4.3.35) şi (4.3.32) rezultă pentru densitatea spectrală de energie expresia

$$u(\omega_{ns}) = \frac{A_{ns}}{B_{sn} \exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right] - B_{sn}}. \tag{4.3.37}$$

Comparînd (4.3.37) cu (4.3.31) rezultă relațiile

$$B_{sn} = B_{ns} = B \qquad (4.3.38)$$

$$\frac{A_{ns}}{B_{ns}} = \frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3} \qquad (4.3.39)$$

Pentru găsirea expresiei lui A_{ns} independentă de B_{ns}, folosim relația care dă energia absorbită pe secundă de un oscilator atomic în echilibru cu radiația de corp negru, dată în enunț

$$S = \frac{2\pi e^2}{3m} u(\omega).$$

Ținînd seama de tăria oscilatorului f_{ns}, energia absorbită într-un interval de timp $\mathrm{d}t$, va fi pentru un atom

$$f_{sn} \frac{2\pi^2 e^2}{3m} u(\omega)\,\mathrm{d}t. \qquad (4.3.40)$$

O altă expresie pentru energia absorbită de atom în intervalul $\mathrm{d}t$, se deduce din (4.3.33), în funcție de coeficientul de absorbție al lui Einstein B_{sn}

$$\hbar\omega_{sn} B_{sn} u(\omega)_{sn}\,\mathrm{d}t. \qquad (4.3.41)$$

Egalînd (4.3.40) cu (4.3.41) se obține

$$f_{sn} \frac{2\pi^2 e^2}{3m} u(\omega)\,\mathrm{d}t = \hbar\omega_{sn} B_{sn} u(\omega)\,\mathrm{d}t \qquad (4.3.42)$$

$$B_{sn} = \frac{f_{sn}\ 2\pi^2 e^2}{3m\ \hbar\omega_{sn}}$$

$$B_{sn} = \frac{2\pi^2 e^2}{3m\hbar\omega_{sn}} |x_{sn}|^2 \frac{m}{\hbar} 2\omega_{sn}$$

$$B_{sn} = \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2} |x_{sn}|^2. \qquad (4.3.43)$$

Din (4.3.43) și (4.3.39) rezultă și expresia lui A_{ns}.

4.4. Un potențial vector

$$\bar{A}(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{B_0}{q}\exp(iqz)\right]\bar{u}_y \tag{4.4.1}$$

produce în sistemul de referință al laboratorului un cîmp magnetic

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \mathrm{Re}\ [-iB_0\ \exp\ (iqz)]\ \bar{u}_x \tag{4.4.2}$$

În sistemul de referință propriu al unui electron relativist, ce se mișcă în direcția $\hat{z}$, potențialul apare ca o undă călătoare

$$\bar{A}' = \mathrm{Re}\left\{\frac{B_0}{q}\exp\left[iq\frac{z'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\right\}\bar{u}_y \tag{4.4.3}$$

producînd cîmpurile

$$\bar{B}' = \mathrm{Re}\left\{-i\frac{B_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\exp\left[iq\frac{z'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\right\}\bar{u}_x \tag{4.4.4.}$$

și

$$\bar{E}' = \mathrm{Re}\left\{-i\frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\exp\left[iq\frac{z'+\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\right\}\bar{u}_y \tag{4.4.5}$$

unde $\beta = \frac{v_z}{c}$.

La limita $\beta \to 1$, aceste cîmupri se apropie de acelea asociate pachetului de undă al fotonilor reali ce se mișcă în direcția $-\hat{z}$.

Se presupune că elementul de matrice al împrăștierii este o funcție continuă monotonă de masa fotonului inițial, în limitele în care energia fotonului în sistemul de referință propriu al electronului e mare în comparație cu excesul de masă al fotonului.

Excesul de masă al fotonului virtual poate fi calculat în sistemul laboratorului, fiind invariant scalar

$$m_\omega^2 c^4 = \mathscr{E}^2 - p^2c^2 = (\hbar\omega)^2 - (q\hbar)^2\ \ c^2. \tag{4.4.6}$$

Deoarece $\omega = 0$ în sistemul laboratorului,

$$|m_\omega c^2| = q\hbar c. \tag{4.4.7}$$

Metoda Weizsächer-Williams se poate aplica în cazul cînd

$$\hbar\omega = \frac{\hbar qc}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg |m_\omega c^2| = q\hbar c \tag{4.4.8}$$

care înseamnă că $\sqrt{1-\beta^2} \ll 1$.

Cu o perioadă a cîmpului magnetic $\lambda_q = 10^{-3}$ m şi un fascicul electronic de 20 GeV, lunginea de undă a pulsului echivalent al radiaţiei în sistemul fix al electronului este

$$\lambda' = \lambda_q \sqrt{1-\beta^2} \gg \frac{h}{m_{0e}c}. \tag{4.4.9}$$

Energia electronului este: $E = \frac{m_{0e}}{\sqrt{1-\beta^2}}c^2$, de unde $\sqrt{1-\beta^2} =$ $= \frac{m_{0e}c^2}{E} = \frac{9\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}}{20\cdot 10^9\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = 2{,}5\cdot 10^{-5}$

Deci $\lambda' = 10^{-3}\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5} = 2{,}5\cdot 10^{-8}$ m.

şi

$$\frac{h}{m_{0e}c} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{9\cdot 10^{-31}\cdot 3\cdot 10^8} = 2{,}5\cdot 10^{-12}\ \text{m}.$$

Deoarece aceasta e energia cea mai mare a fasciculului şi cea mai mică perioadă a cîmpului magnetic, probabil a fi folosite, împrăştierea în sistemul fix al electronului poate fi privită ca fiind guvernată de formula lui Thomson

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2(1+\cos^2\theta) \approx r_0^2, \text{ pentru } \theta = \pi \tag{4.4.10}$$

unde r_0 este raza clasică a electronului.

În cele ce urmează, fotonul împrăştiat înapoi poate fi privit ca avînd aceeaşi lungime de undă în sistemul fix ca şi fotonul incident.

În sistemul de laborator, pentru $\theta = \pi$, secţiunea de împrăştiere se transformă în

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} \approx \frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{fix} \approx \frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2} r_0^2 \tag{4.4.11}$$

Lungimea de undă a stării finale a fotonului împrăştiat înapoi devine

$$\lambda_f = \frac{\lambda_0(1-\beta^2)}{1+\beta} = \frac{\lambda_0(1-\beta^2)}{(1+\beta)^2} \approx \frac{\lambda_0}{4}(1-\beta^2) \qquad \textbf{(4.4.12)}$$

Multiplicînd secţiunea de împrăştiere din sistemul laboratorului cu fluxul fotonilor, obţinem rata de tranziţie dintr-o stare iniţială definită, pe o stare finală, ce se află în unghiul solid $d\Omega$

$$W_{Compton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\cdot \text{fluxul fotonilor}\cdot d\Omega =$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|\, H'\,|\, i\rangle|^2 \rho_f \qquad \textbf{(4.4.13)}$$

unde ρ_f este densitatea de stări finale.

Cîştigul dat de emisia stimulată e proporţional cu rata de tranziţie spontană într-o stare definită, dar nespecificată (de fapt, unul din modurile rezonante ale unei cavităţi optice) ţinînd cont de toate combinaţiile posibile ale impulsurilor fotonului iniţial şi electronului care conduc la acea stare. Deci mărimea căutată este rata tranziţiei spontane într-o stare fotonică finală, W_d

$$W_d = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|\, H'\,|\, i\rangle|^2 \rho_i \qquad \textbf{(4.4.14)}$$

unde ρ_i este densitatea de stări iniţiale. Elementul de matrice e acelaşi în ambele cazuri, şi

$$W_d = W_{Compton}\frac{\rho_i}{\rho_f}. \qquad \textbf{(4.4.15)}$$

Folosind formula lui Feynman [R. P. Feynman ,,*Quantum Electrodynamics*", Benjamin, New-York, 1962, pag. 92] pentru densitatea de stări finale a unui sistem de două particule

$$dN = \left(\frac{1}{\hbar c}\right)^3 \frac{\mathcal{E}_f^f\cdot \mathcal{E}_f^e c\,|\bar{k}_f|^3 d\Omega_f}{\mathcal{E}\,|\bar{k}_f|^2 - \mathcal{E}_f^f(\bar{p}_f+\bar{k}_f)\bar{k}_f} \qquad \textbf{(4.4.16)}$$

unde funcţiile de undă ale electronului şi fotonului au fost normate în unitatea de volum şi unde $\mathscr{E}_f^f$, k_f şi $\mathrm{d}\Omega_f$ sînt energia, impulsul şi unghiul solid diferenţial, care definesc fotonul împrăştiat înapoi, $\mathscr{E}_f^e$ şi $\bar{p}_f$, energia şi impulsul electronului în starea finală, iar

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_f^f + \mathscr{E}_f^e.$$

În cazul limită dat de relaţia (4.4.9), dN se reduce la

$$\mathrm{d}N \approx \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\mathscr{E}_f^{f2}\mathscr{E}_f^e \mathrm{d}\Omega}{mc^2(hc)^3} \qquad (4.4.17)$$

Densitatea stărilor iniţiale se poate deduce din definiţia ei ca numărul stărilor distincte din elementul de energie d$\mathscr{E}'$ (care dă eroarea la conservarea energiei) care conduc la starea finală căutată şi din conservarea impulsului.

Dacă impulsul fotonului în starea finală k_f şi impulsul electronului în starea iniţială p_i sînt specificate, selecţia impulsului fotonului iniţial echivalent k_i determină impulsul electronului în starea finală p_f din conservarea impulsului

$$\bar{p}_i + \bar{k}_i = \bar{p}_f + \bar{k}_f \qquad (4.4.18)$$

unde $\bar{k}_i$, $\bar{k}_f$, $\bar{p}_i$, $\bar{p}_f \| \hat{z}$.

Densitatea de stări cu p_i fixaţi se determină din densitatea de stări a fotonilor iniţiali

$$\rho_i' \mathrm{d}\mathscr{E}' = \rho_\omega(\mathscr{E}_i)\mathrm{d}\mathscr{E}_i \qquad (4.4.19)$$

unde $\mathscr{E}'$ este eroarea la conservarea energiei

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E}_i^f + \mathscr{E}_i^e - (\mathscr{E}_f^f + \mathscr{E}_f^e) = c\sqrt{p_i^2 + m^2c^2} +$$

$$+ \mathscr{E}_i^f - c\sqrt{(p_i - k_i - k_f)^2 + m^2c^2} - \mathscr{E}_f^f \qquad (4.4.20)$$

astfel că $$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}'}{\mathrm{d}\mathscr{E}_i^f} = \frac{1 + c(p_i - k_i - k_f)}{c\sqrt{p_i - k_i - k_f)^2 + m^2c^2}} \approx 2 \qquad (4.4.21)$$

pentru $\sqrt{1-\beta^2} \ll 1$ şi $\rho_i' = \rho_\omega(\mathscr{E}_i^f)\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_i^f}{\mathrm{d}\mathscr{E}'} \approx \dfrac{1}{2}\rho_\omega(\mathscr{E}_i^f)$. (4.4.22)

Numărul total al stărilor ce conduc la $\bar{k}_f$ se obţine prin integrarea după N_i

$$\rho_i = \int \rho_e(\mathscr{E}_i^e)\rho_i' \mathrm{d}\mathscr{E}_i^e \approx \frac{1}{2}\int \rho_e(\mathscr{E}_i^e)\rho_\omega(\mathscr{E}_i^f)\mathrm{d}\mathscr{E}_i^e. \qquad (4.4.23)$$

Considerăm o distribuţie gaussiană pentru stările iniţiale normate ale fotonilor şi electronilor, de forma

$$\rho_e(\mathscr{E}_i^e) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\mathscr{E}_i^e}\exp\left[-\frac{(\mathscr{E}_i^e - \mathscr{E}_i^{e*})}{(\Delta\mathscr{E}_i^e)^2}\right] = \qquad (4.4.24)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\gamma mc^2}\exp\left[-\frac{(\gamma-\gamma_0)^2}{(\Delta\gamma)^2}\right] \qquad (4.4.24)$$

unde $\mathscr{E}_i^e = \gamma mc^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\qquad \mathscr{E}_i^{e*} = \gamma_0 mc^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$

cu γ_0 — centrul distribuţiei electronilor, $\Delta\gamma$ — semilărgimea distribuţiei electronilor şi

$$\rho_\omega(\mathscr{E}_i^f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Delta\mathscr{E}_i^f}\exp\left[-\frac{(\mathscr{E}_i^f - \mathscr{E}_i^{f*})}{(\Delta\mathscr{E}_i^f)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\hbar\Delta\omega}\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2}\right] \qquad (4.4.25)$$

unde $\mathscr{E}_i^f = \hbar\omega$ şi ω_0 centrul distribuţiei echivalente reale a fotonilor ($\mathscr{E}_i^{f*} = \hbar\omega_0$) şi $\Delta\omega$ — semilărgimea distribuţiei echivalente a fotonilor.

Definind pe $\delta\omega$, prin alegerea lui $\mathscr{E}_f^f$, din ecuaţia $\mathscr{E}_f^f = \hbar(1+\beta)^2\gamma_0^2(\omega+\delta\omega)$, densitatea stărilor iniţiale e dată de

$$\rho_i = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Delta\gamma}\exp\left[-\frac{(\gamma-\gamma_0)^2}{(\Delta\gamma)^2}\right]\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\hbar\Delta\omega}\cdot$$

$$\cdot\exp\frac{\left[\left(\dfrac{\gamma_0}{\gamma}\right)^2 - 1\right]\omega_0^2 + \left(\dfrac{\gamma_0}{\gamma}\right)^2(\delta\omega)^2}{(\Delta\omega)^2}\,\mathrm{d}\gamma \qquad (4.4.26)$$

care în cazul $\Delta\gamma \ll \gamma_0$, $\Delta\omega \ll \omega_0$ şi $\delta\omega \ll \omega_0$ se reduce, după efectuarea integralei, la

$$\rho_i \approx \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta\omega}\right)^2 + \left(\frac{2\omega_0}{\gamma_0 \Delta\omega}\right)^2}}{2\sqrt{\pi}\,\hbar\Delta\omega\Delta\gamma} \exp\left\{-2\left[\frac{\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\frac{\delta\omega}{2\omega_0}}{\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)^2}\right]^2\right\}. \tag{4.4.27}$$

Putem acum folosi ecuaţia (4.4.15) pentru a calcula rata tranziţiei spontane, în unitatea de volum, pe o stare finală a fotonului, dacă densităţile iniţiale de fotoni şi electroni, din unitatea de volum, sînt egale cu unitatea

$$W_d = \text{fluxul fotonilor} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{\rho_i}{\rho_f} d\Omega \approx$$

$$\cong \frac{\frac{2c}{\sqrt{\pi}} r_0^2 \lambda_f^2 \frac{1}{\Delta\gamma} \frac{c}{\Delta\omega}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta\gamma}\right)^2 + \left(\frac{2\omega_0}{\gamma_0 \Delta\omega}\right)^2}} \exp\left\{-2\left[\frac{\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \cdot \frac{\delta\omega}{2\omega_0}}{\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)^2}\right]^2\right\}. \tag{4.4.28}$$

Cîştigul pe unitatea de lungime e dat de numărul de fotoni împrăştiaţi în exces pe unitatea de lungime, datorită trecerii pachetului de undă al fotonului stimulat. O densitate de fotoni, egală cu unitatea în unitatea de volum, dublează rata de tranziţie, astfel cîştigul devenind egal cu numărul de fotoni emişi spontan în timpul în care fotonul stimulat traversează unitatea de volum de interacţie.

Cîştigul α în dB/m va fi dat de

$$\alpha = \frac{4{,}34\, W_d \cdot \rho_{\omega 0} \cdot \rho_{e0}}{c}. \tag{4.4.29}$$

Absorbţia este în competiţie cu emisia stimulată şi acţionează să depopuleze starea finală a fotonilor, dacă un foton cu energia $\mathscr{E}_f^f$ e difuzat înapoi de un electron cu enegria $\mathscr{E}_f^e$ pentru a obţine un foton cu energia $\mathscr{E}_i^f$ şi un electron avînd energia $\mathscr{E}_i^e = \mathscr{E}_f^e + \mathscr{E}_f^f - \mathscr{E}_i^f$. Procesul e stimulat de fotonii prezenţi deja în cîmpul magnetic, care sînt identici cu fotonii difuzaţi.

Rata de tranziţie pentru acest proces se poate calcula folosind ecuaţia (4.4.14) şi definind corespunzător densitatea de stări de absorbţie ρ_{abs}.

Avînd fotoni cu energie mare şi energia electronilor iniţiali fixată, rata tranziţiei stimulate e proporţională cu produsul dintre densitatea de moduri corespunzătoare fotonilor cu energie mică şi numărul de fotoni stimulaţi pe mod, adică cu $\rho_\omega(\mathscr{E}_i^f)$. Incluzînd în ρ_{abs} dependenţa de rata de tranziţie a radiaţiei stimulate, densitatea de stări pentru $\mathscr{E}_f^e$ fiind fixată, obţinem

$$\rho_{abs}\mathrm{d}\mathscr{E}' = \rho_\omega(\mathscr{E}_i^f)\mathrm{d}\mathscr{E}_i^f. \tag{4.4.30}$$

Folosim ecuaţiile (4.4.20) şi (4.4.21) pentru a obţine pe $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_i^f}{\mathrm{d}\mathscr{E}'}$

$$\rho_{abs} \approx \frac{1}{2}\,\rho_\omega(\mathscr{E}_i^f) \text{ pentru } \sqrt{1-\beta^2} \ll 1.$$

Integrarea după toate energiile stărilor iniţiale posibile, duce la

$$\rho_{abs} = \frac{1}{2}\int \rho_e(\mathscr{E}_f^e)\,\rho_\omega(\mathscr{E}_f^f)\mathrm{d}\mathscr{E}_f^f. \tag{4.4.31}$$

Folosind distribuţiile date de ecuaţiile (4.4.24), (4.4.25), integrala devine

$$\rho_{abs} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\gamma}\exp\left\{-\frac{\left[(\gamma-\gamma_0)-\frac{\mathscr{E}_f^f}{mc^2}\right]^2}{(\Delta\gamma)^2}\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{\left[\left[\left(\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)^2-1\right]\omega_0+\left(\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)^2\delta\omega\right]^2\frac{1}{\Delta\omega}}{\sqrt{\pi}\,\hbar\,\Delta\omega}\right\} \tag{4.4.32}$$

care în cazul în care $\Delta\gamma \ll \gamma_0$, $\Delta\omega \ll \omega_0$ şi $\delta\omega \ll \omega_0$ se reduce la

$$\rho_{abs} = \frac{\exp\left\{-2\left[\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\left(\frac{\mathscr{E}_f^f}{\gamma_0 mc^2}-\frac{\delta\omega}{2\omega_0}\right)\right]\right\}}{2\sqrt{\pi}\,\Delta\gamma\hbar\Delta\omega\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta\gamma}\right)^2+\left(\frac{2\omega_0}{\gamma_0\Delta\omega}\right)^2}}. \tag{4.4.33}$$

Cîştigul total pe unitatea de lungime e dat de diferenţa dintre cîştigul dat de emisia stimulată şi pierderile datorate absorbţiei

$$\alpha = \frac{8{,}69 r_0^2 \lambda_f^2 \rho\omega_0 \, \rho e_0 c}{\sqrt{\pi}\,\Delta\gamma\Delta\omega \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta\gamma}\right)^2 + \left(\frac{2\omega_0}{\gamma_0\Delta\omega}\right)^2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\exp\left\{ -2\left[\frac{\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\cdot\frac{\delta\omega}{2\omega_0}}{\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)^2}\right]^2 \right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{ -2\left[\frac{\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\left(\frac{E_f^f}{\gamma_0 mc^2} - \frac{\delta\omega}{2\omega_0}\right)}{\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)^2}\right]^2 \right\} \right). \tag{4.4.34}$$

Pentru calcularea lui $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ ţinem cont că se foloseşte un cîmp magnetic spaţial periodic, de lungime finită, care impune o limită superioară omogenităţii pulsului de radiaţie echivalent.

Presupunem un cîmp sinusoidal cu n perioade cuprinse în lungimea lui L. Pătratul transformatei Fourier a amplitudinii pulsului de radiaţie echivalent $|f(\omega)|^2$ este proporţional cu

$$|f(\omega)|^2 \propto \left(\frac{\sin \frac{2n\pi(\omega - \omega_0)}{2\omega_0}}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin \frac{2n\pi(\omega + \omega_0)}{2\omega_0}}{\omega + \omega_0} \right)^2 . \tag{4.4.35}$$

Dacă $|f(\omega)|^2$ are o formă gaussiană în vecinătatea lui ω_0

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{0{,}53}{n} = 0{,}53\,\frac{\lambda_q}{L} \tag{4.4.36}$$

Omogenitatea fasciculului electronic se poate calcula din valoarea de echilibru

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{0{,}35\mathscr{E}_f^f}{\gamma mc^2} .$$

Densitățile de electroni și fotoni se calculează folosind formulele

$$\rho_{\omega 0} = 5{,}008 \cdot B_0^2 \lambda_0 10^9 \text{ fotoni} \cdot m^{-3}$$

$$\rho_{e0} = 2{,}082 \ I \cdot 10^{22} \text{ electroni} \cdot m^{-3}$$

pentru o secțiune a fasciculului de 10^{-6} m².

Făcînd calculele în cazul numeric dat se obțin valorile:

γ	$\lambda f \cdot 10^{-10}$m	$\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$	$\frac{\Delta\omega}{\omega}$	I(A)	$\bar{\alpha}\left(\frac{dB}{m}\right)$	$\alpha\left(\frac{dB}{m}\right)$
10	$5 \cdot 10^5$	$2{,}6 \cdot 10^{-4}$	$5{,}3 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	7,7	$6{,}8 \cdot 10^5$
10^2	$5 \cdot 10^3$	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	$5{,}3 \cdot 10^{-4}$	0,5	0,7	$8{,}2 \cdot 10^3$
10^3	50	$4{,}1 \cdot 10^{-4}$	$5{,}3 \cdot 10^{-4}$	1	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	1,0
$7 \cdot 10^3$	0,85	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	$5{,}3 \cdot 10^{-4}$	1	$4{,}5 \cdot 10^{-7}$	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$

4.5. Considerăm radiația provenită de la o colectivitate de N atomi conținuți într-un volum ale cărui dimensiuni sînt mici în comparație cu lungimea de undă a radiației.

Dacă sistemul de N atomi se prezintă cu n_+ atomi în starea superioară și n_- atomi în starea inferioară, la timpul $t = 0$, funcția de undă a sistemului este dată de combinația simetrică

$$|n_+, n_-\rangle = \left(\frac{N!}{n_+!\, n_-!}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{p} |+_1 \ +_2 \ldots +_{n_+}, -(n_+ +_1), -(n_+ \ +_2) \ldots {}^{-}N\rangle \quad (4.5.1)$$

unde prin $\sum_p$ se înțelege sumarea pentru toate posibilitățile de excitare a celor N atomi. De exemplu, dacă $n_+ = 2$ și $n_- = 1$, ecuația (4.5.1) devine

$$|2_+, 1_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\{|+_1 +_2 -_3\rangle + |+_1 -_2 +_3\rangle + |-_1 +_2 +_3\rangle\}. \quad (4.5.2)$$

Ne interesează — în matrice — elementul care cuplează starea $|1\rangle$ la starea $|n_+ -1, n_- +1\rangle$. Acest element de matrice este, desigur, relativ la emisia spontană a unui foton de către colectivul nostru de atomi și este dat de

$$\langle n_+ -1, n_- +1 \left| \sum_i \sigma_i^+ \right| n_+ \ n_-\rangle \quad (4.5.3)$$

unde σ_i^+ este operatorul care aduce cel de-al i-lea atom din stare $|-\rangle$ în starea $|+\rangle$. Considerînd că $|n_+, n_-\rangle$ este dat de (4.5.1) şi scriind o expresia similară pentru $|n_+ - 1, n_- + 1\rangle$, relaţia (4.5.3) devine

$$\left[\frac{N!}{(n_+ - 1)!\,(n_- + 1)!}\right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{N!}{n_+!\,n_-!}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{N!}{(n_+ - 1)!\,(n_- + 1)!}\right] \quad (4.5.4)$$

$$(n_- + 1) = \sqrt{n_- + 1}\,\sqrt{n_+}.$$

Mai departe, dacă $n_+ \approx n_- = \frac{N}{2}$, atunci elementul de matrice pentru emisia spontană este proporţional cu N şi probabilitatea de emisie a unui foton este proporţională cu N^2. Aceasta este — de fapt — o proprietate specială a funcţiei de undă simetrice (4.5.1) care a fost luată de noi ca stare iniţială. Dacă vom face o altă combinaţie a celor (n_+ n_-) sisteme, se va obţine o valoare diferită pentru probabilitatea de emisie spontană. De exemplu, cei doi vectori de stare atomică

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|+_1\ -_2\rangle + |-_1\ +_2\rangle) \quad (4.5.5)$$

se dezintegrează ca

$$\langle -_1\ -_2|(\sigma_1^+ + \sigma_2^+)(|+_1\ -_2\rangle + |-_1\ +_2\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (4.5.6)$$

pe cînd cealaltă combinaţie posibilă

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|+_1\ -_2\rangle - |-_1\ +_2\rangle) \quad (4.5.7$$

nu se dezintegrează deloc, deoarece

$$\langle -_1\ -_2|(\sigma_1^+ + \sigma_2^+)(|+_1\ -_2\rangle - |-_1\ +_2\rangle) = 0. \quad (4.5.8)$$

În experienţa lui Burnham şi Chiao pentru a produce supraradianţa, ansamblul de atomi a fost supus la un puls laser intens şi de scurtă durată, urmărindu-se colectivitatea de atomi care radiază energia lor. S-a constatat că sistemul (ansamblul de atomi) a radiat cel mai mult din energia lui într-o mică fracţiune din timpul de viaţă atomic.

În final se observă că supraradianța poate fi privită din punct de vedere fizic, după cum urmează. Excitînd N atomi astfel ca să avem aceeași suprapunere liniară a stărilor, atunci cel de-al i^{lea} atom va avea un moment de dipol

$$\bar{P}_i = e\langle + |\bar{r}| - \rangle (\rho^i_{+-}(t) + \rho^i_{-+}(t)). \tag{4.5.9}$$

Cîmpul electric radiat de o asemenea serie de atomi este

$$\bar{E}(t, R) = \frac{1}{c^2 R} \sum_{i=1}^{N} \omega^2 \hat{n} \times \left(\hat{n} \times \left\langle \hat{P}_i\left(t - \frac{|R|}{c}\right)\right\rangle\right) \tag{4.5.10}$$

unde $\bar{R}$ este distanța la punctul de observație, $\hat{n} = \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$ este vectorul unitate avînd sensul de la origine la punctul din cîmp, c viteza luminii și $\hat{P}_i(t)$ polarizarea atomică care a fost evaluată la timpul retardat $t - \frac{|\bar{R}|}{c}$. Deci, cîmpul electric este proporțional cu N și intensitatea luminii (mediată pe numărul de fotoni) cu N^2

$$I \propto E^2 \propto N^2 \tag{4.5.11}$$

care este evidențierea supraradianței.

4.6. Prima experiență de obținere a ecoului fotonic a fost efectuată de Abella, Kurnit și Hartman. Prin iluminarea unui mediu, caracterizat de lărgire neomogenă, cu un puls de lumină (puls de 90°, v. figura 4.6R), se produce o polarizare macroscopică, care se

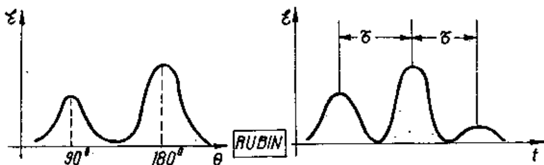


Fig. 4.6R

amortizează rapid (datorită lărgirii neomogene). Injectăm un alt puls (la 180°) la un timp τ după primul, care — în mod efectiv — inversează timpul. Astfel, atomii se vor reface la un timp τ după al doilea puls, producînd un ecou, cum este evidențiat în figură.

Pentru a demonstra procesul de „ecou fotonic" se injectează două pulsuri coliniare separate de intervalul de timp τ şi se caută pulsul ecou care emerge de la mediu la un timp aproximativ 2τ după primul puls. Se consideră că mediul constă din atomi cu două nivele atomice avînd frecvenţele de rezonanţă ω_i. Polarizarea pentru al i-lea atom, exprimată în funcţie de matricea densitate $\rho_i(t)$, operatorul de deplasare x_i şi de sarcina electrică e, este

$$\langle P_i(t) \rangle = \text{Urma}[e x_i \rho_i(t)] \tag{4.6.1}$$

Dacă efectul celui de-al j-lea puls ($j = 1$ sau 2) este notat prin U_j, starea celui de-al i-lea atom după al doilea puls este

$$|\psi_i(t)\rangle = \exp\{-i H_0(t-t_2)\} U_2 \exp\{-iH_0(t_2-t_1)\} U_1 |\psi_i(t_1)\rangle \tag{4.6.2}$$

unde H_0 este hamiltonianul atomului liber şi t_j este timpul de sosire al celui de-al j-lea puls.

Expresia corespunzătoare pentru matricea densităţii este dată de

$$\rho_i(t) = |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|. \tag{4.6.3}$$

Introducînd ecuaţiile (4.6.2) şi (4.6.3) în (4.6.1) şi reţinînd numai termenii care duc la un ecou, se obţine

$$\langle P_i(t) \rangle = A_i \cos \omega_i(t - 2\tau) \tag{4.6.4}$$

unde

$$A_i = 2\langle b|ex_i|a\rangle|\langle a|U_{2i}|b\rangle|^2\langle a|U_{1i}|b\rangle\langle b|U_{1i}|b\rangle \tag{4.6.5}$$

Din ecuaţiile

$$\bar{E}(t,\ R) = \frac{1}{c^2 R}\sum_{i=1}^{N} \omega^2 \hat{n} \times \left(\hat{n} \times \left\langle \bar{P}_i\left(t - \frac{|\bar{R}|}{c}\right)\right\rangle\right) \tag{4.6.6}$$

şi (4.6.4), se obţine cîmpul electric radiat la momentul t. Cînd A_i este variat lent, polarizarea (4.6.4) introdusă în (4.6.6) dă cîmpul radiat

$$E \propto A \sum_i \cos \omega_i(t - 2\tau). \tag{4.6.7}$$

Avînd în vedere existenţa unei distribuţii de frecvenţe atomice ω_i, cîmpul electric (4.6.7) va fi cu „faza întîmplătoare", care va avea valoarea zero numai pentru $t = 2\tau$. Deci, la acest timp toţi dipolii se vor refaza pentru a produce un ecou. Este de notat că intensitatea ecoului va fi proporţională cu N^2 şi, astfel, va rezulta procesul supraradiant.

5.1. Relaţia

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle A_1(t+\tau)\ A_2^*(t)\rangle \exp[-i\varphi] = \langle u_1(t+\tau)\ u_2^*(t)\rangle \quad (5.1.1)$$

reprezintă o corelaţie a amplitudinilor sau o corelaţie de ordinul doi, adică, coerenţa mutuală a oscilaţiilor emise din punctele P_1 şi P_2.

Normalizăm relaţia (5.1.1) ţinînd seama de faptul că atît $A_1(t)$, cît şi $A_2(t)$ variază lent, adică

$$A_1(t + \tau) \approx A_1(t). \quad (5.1.2)$$

Astfel, avem

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle A_1(t) A_2^*(t)\rangle \exp[-i\varphi]}{(\langle A_1(t) A_1^*(t)\rangle)^{1/2} (\langle A_2(t)\cdot A_2^*(t)\rangle)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\langle A_1(t) A_2^*(t)\rangle \exp[-i\varphi]}{(I_1 I_2)^{1/2}}. \quad (5.1.3)$$

$\gamma_{12}(\tau)$ purtînd numele de grad de coerenţă complex al radiaţiilor emise din punctele P_1 şi P_2, iar mărimile

$$I_1 = |K_1|^2 \langle A_1(t)\cdot A_1^*(t)\rangle \quad (5.1.4)$$

şi

$$I_2 = |K_2|^2 \langle A_2(t)\cdot A_2^*(t)\rangle \quad (5.1.5)$$

fiind intensităţile produse în punctul Q de radiaţiile sosite din P_1, respectiv din P_2, dacă ar acţiona separat, iar K_1 şi K_2 sînt constante de proporţionalitate. Amplitudinile corespunzătoare ale acestor radiaţii, în Q sînt

$$u_1(t) = K_1 A_1(t) \exp[i\,\omega_0 t] \quad (5.1.6)$$

şi

$$u_2(t) = K_2 A_2(t + \tau) \exp[i\,\omega_0(t + \tau)] \quad (5.1.7)$$

iar semnalul analitic total este

$$u(t) = K_1 A_1(t) \exp[i\,\omega_0 t] + K_2 A_2(t+\tau) \exp[i\,\omega_0 (t+\tau)]. \quad (5.1.8)$$

Intensitatea totală a radiațiilor sosite în punctul Q, cînd acestea acționează împreună, este

$$I = |K_1|^2 \langle A_2(t) \cdot A_1^*(t) \rangle + |K_2|^2 \langle A_2(t) \cdot A_2^*(t) \rangle +$$

$$+ K_1^* K_2 \langle A_1^*(t) \cdot A_2(t) \rangle \exp[i\varphi] +$$

$$+ K_1 K_2^* \langle A_1(t) \cdot A_2^*(t) \rangle \exp[-i\varphi] \quad (5.1.9)$$

Deoarece

$$K_1 K_2^* = K_1^* K_2 = |K_1 K_2|, \quad (5.1.10)$$

avem

$$I = I_1 + I_2 + 2\,|K_1 K_2|\,\mathrm{Re}[\langle A_1(t) A_2^*(t) \rangle \exp[-i\varphi]] =$$

$$= I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2}\,\mathrm{Re}[\gamma_{12}(\tau)]. \quad (5.1.11)$$

Punînd

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\langle A_1(t) A_2^*(t) \rangle}{(I_1 I_2)^{1/2}} \quad (5.1.12)$$

avem

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{12}(0) \exp[-i\varphi]. \quad (5.1.13)$$

Amplitudinile $A_1(t)$ și $A_2(t)$ fiind complexe, $A(t) = a(t) \exp[i\,\varphi_0(t)]$, se poate scrie

$$\gamma_{12}(0) = |\gamma_{12}(0)| \exp\ [i\,\alpha_{12}], \quad (5.1.14)$$

α_{12} fiind argumentul mărimii complexe $\langle A_1(t) A_2^*(t) \rangle$. Cu aceste notații, relația (5.1.11) devine

$$I = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2}\,|\gamma_{12}(0)| \cos(\alpha_{12} - \varphi) \quad (5.1.15)$$

unde $|\gamma_{12}(0)|$ este *gradul de coerență* al radiațiilor provenite din punctele P_1 și P_2.

Din punct de vedere teoretic se constată trei cazuri:

1°) $|\gamma_{12}(0)| = 1$, expresia (5.1.11) devenind

$$I = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \cos(\alpha_{12} - \varphi) \quad (5.1.16)$$

și se spune că undele emise de sursele P_1 și P_2 sînt coerente.

2°) $|\gamma_{12}(0)| = 0$, expresia (5.1.11) devenind

$$I = I_1 + I_2, \tag{5.1.17}$$

adică, sursele P_1 şi P_2 sînt incoerente.

3°) $0 < |\gamma_{12}(0)| < 1$. În acest caz, radiaţiile emise de surslele P_1 şi P_2 sînt radiaţii parţial coerente şi $|\gamma_{12}(0)|$ măsoară gradul lor de coerenţă.

5.2. Notînd cu $I_1(t+\tau)$ intensitatea în punctul P_1 şi cu $I_2(t)$ intensitatea în punctul P_2, se consideră corelaţia intensităţilor definită prin expresia:

$$\langle I_1(t+\tau) I_2(t) \rangle = \langle u_1(t+\tau) u_1^*(t+\tau) u_2(t) u_2^*(t) \rangle \tag{5.2.1}$$

Dacă sursa de radiaţie emite trenuri de undă aleatorii, conform statisticii gaussiene, corelaţia de ordinul patru $\langle I_1(t+\tau)\ I_2(t)\rangle$ nu conţine mai multe informaţii decît corelaţia de ordinul doi

$$\langle u_1(t+\tau) u_2^*(t) \rangle.$$

Studiul corelaţiei de ordinul patru $\langle I_1(t+\tau)\ I_2(t)\rangle$ permite să se considere problema coerenţei altfel şi să se ajungă la realizări experimentale mai simple pentru gradul de coerenţă. Astfel, calculele arată că

$$\langle I_1(t+\tau)\, I_2(t)\rangle = \langle I_1(t)\rangle \langle I_2(t)\rangle + |\gamma_{12}(\tau)|^2, \tag{5.2.2}$$

$\gamma_{12}(\tau)$ fiind coerenţa mutuală (corelaţia de al doilea ordin).

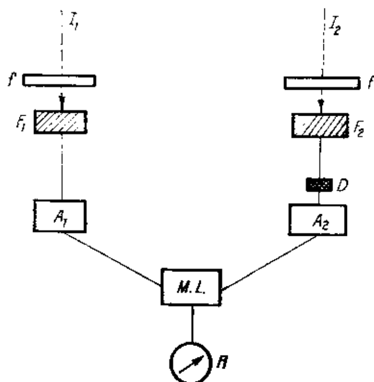


Fig. 5.2R

Un interferometru Hanbury-Brown şi Twiss se prezintă ca în figura 5.2 R. Fotomultiplicatoarele F_1 şi F_2 primesc lumina de la sursă şi curenţii vor fi proporţionali cu $I_1(t)$, respectiv $I_2(t)$. Lumina sosită fiind formată din trenuri de undă, curenţii anodici vor fluctua, dacă timpul de răspuns al fotomultiplicatoarelor este mic. A_1 şi A_2 amplifică cei doi curenţi şi multiplicatorul liniar ML efec-

tuează produsul celor doi curenţi, adică produsul intensităţilor I_1 şi I_2. Dispozitivul D introduce un decalaj de timp variabil între I_1 şi I_2. Aparatul R măsoară fluctuaţiile $\Delta I_1(t)$ şi $\Delta I_2(t)$ în jurul valorilor medii $\langle I_1(t)\rangle$ şi $\langle I_2(t)\rangle$. Deci

$$\Delta I_1(t) = I_1(t) - \langle I_1(t) \rangle \qquad (5.2.3)$$

şi

$$\Delta I_2(t) = I_2(t) - \langle I_2(t) \rangle \qquad (5.2.4)$$

iar

$$\langle \Delta I_1(t) \rangle = 0 \quad \text{şi} \quad \langle \Delta I_2(t) \rangle = 0. \qquad (5.2.5)$$

Astfel

$$\langle \Delta I_1(t + \tau)\Delta I_2(t) \rangle = \langle I_1(t)\rangle \langle I_2(t) \rangle |\gamma_{12}(\tau)|^2. \qquad (5.2.6)$$

Într-un interval de timp T egal cu timpul de rezoluţie al fotomultiplicatoarelor, semnalul unui fotomultiplicator va fi

$$S(t) = \frac{m}{T}\int_t^{t+T} I(t)\mathrm{d}t, \qquad (5.2.7)$$

m caracterizînd sensibilitatea fotomultiplicatorului (m = const., deoarece în faţa fiecărui multiplicator se pune un filtru f care nu lasă să treacă decît lumina cuasimonocromatică). Astfel, intervine corelaţia $\langle S_1(t + \tau) S_2(t) \rangle$.

Pentru $\tau = 0$ (τ fiind timpul de coerenţă al luminii primite de fotomultiplicatoare), avem

$$\langle S_1(t)S_2(t) \rangle = \langle\Delta S_1(t)\cdot\Delta S_2(t) \rangle + \langle S_1(t) \rangle\langle S_2(t)\rangle \qquad (5.2.8$$

unde

$$\langle \Delta S_1(t)\cdot\Delta S_2(t) \rangle = 0. \qquad (5.2.9)$$

Pentru $\tau \neq 0$, avem

$$\langle \Delta S_1(t)\cdot \Delta S_2(t) \rangle = \langle S_1(t) \rangle\langle S_2(t) \rangle \frac{\tau}{T} |\gamma_{12}(0)|^2 \qquad (5.2.10)$$

Deci, măsurînd pe $\langle \Delta S_1(t)\cdot\Delta S_2(t) \rangle$, se poate deduce gradul de coerenţă $|\gamma_{12}(0)|$.

Gradul de coerenţă făcînd să intervină repartiţia energiilor pe sursă, corelaţia este proporţională cu pătratul energiei. Ca atare, metoda de măsurare a lui Handbury-Brown şi Twiss este simplă dar necesită surse strălucitoare.

5.3. Funcția $I(\omega)$ poate fi scrisă ca o transformată Fourier a funcției $V(\Delta)$ sub forma

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\Delta)\exp[-2\pi i\,\omega\Delta]\mathrm{d}\Delta \tag{5.3.1}$$

Din teorema de reciprocitate a integralelor Fourier rezultă că

$$V(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)\exp[2\pi i\,\omega\Delta)]\mathrm{d}\omega. \tag{5.3.2}$$

Se observă că

$$\int_{\omega_0-\omega_1}^{\omega_0+\omega_1} \exp(2\pi i\,\omega\Delta)\,\mathrm{d}\omega = \frac{\sin 2\pi\,\omega_1\Delta}{\pi\Delta} \tag{5.3.3}$$

Relația (5.3.3.) arată că transformata Fourier a funcției

$$J(\omega) = \begin{cases} 0 & -\infty < \omega < (\omega_0 - \omega_1) \\ 1 & (\omega_0 - \omega_1) < \omega < (\omega_0 + \omega_1) \\ 0 & (\omega_0 + \omega_1) < \omega < \infty \end{cases} \tag{5.3.4}$$

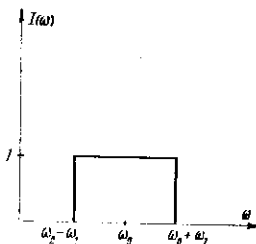


Fig. 5.3R

este funcția de vizibilitate $V(\Delta)$ dată în problemă. Cu alte cuvinte spectrul de frecvență $I(\omega)$ este dat de ecuația (5.3.4) al cărui grafic este funcția de formă dreptunghiulară (fig. 5.3.R).

5.4. Diferența de fază dintre cele două fascicule care produc franjele de interferență va fi

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = K_0\delta \tag{5.4.1}$$

Rezultatul interferenței a două unde de intensități I_1 și I_2, coerente și monocromatice, între care există un defazaj φ este descris de

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi \tag{5.4.2}$$

sau

$$I = 2I_1(1 + \cos \varphi) \text{ cînd } I_1 = I_2. \qquad (5.4.2')$$

Intensitatea rezultantă I va avea valori maxime şi minime care, presupunînd intensităţile celor două fascicule egale, vor fi

$$I_{max} = 4I_1, \quad I_{min} = 0. \qquad (5.4.3)$$

Cînd sursa nu este strict monocromatică ecuaţia (5.4.2') va avea contribuţie la intensitatea componentelor spectrale dintr-un interval dK_0 în jurul valorii K_0

$$I(K_0, \delta)dK_0 = 2I_1(K_0)[1 + \cos(K_0\delta)]\, dK_0 \qquad (5.4.4)$$

unde $I_1(K_0)$ reprezintă distribuţia spectrală de intensitate în fiecare dintre fascicule.

Intensitatea totală într-un punct al figurii de interferenţă va fi

$$I(\delta) = 2\int I_1(K_0)[1 + \cos(K_0\delta)]\, dK_0. \qquad (5.4.5)$$

Pentru o linie spectrală $I_1(K_0)$ are valori importante numai într-un domeniu foarte restrîns de valori ale lui K_0 în jurul valorii $\bar{K}_0$. Notînd

$$\begin{aligned} x &= K_0 - \bar{K}_0 \\ J(x) &= I_1(\bar{K}_0 + x) \end{aligned} \qquad (5.4.6)$$

ecuaţia (5.4.5) se va scrie

$$\begin{aligned} I(\delta) &= 2\int J(x)\{1 + \cos[(\bar{K}_0 + x)\delta]\}dx = 2\Big[\int J(x)dx + \\ &+ \int J(x)\cos(\bar{K}_0\delta)\cos(x\delta)dx - \int J(x)\sin(\bar{K}_0\delta)\sin(x\delta)\,dx\Big] = \\ &= P + C\cos(\bar{K}_0\delta) - S\sin(\bar{K}_0\delta) \end{aligned} \qquad (5.4.7)$$

unde

$$P = 2\int J(x)dx, \quad C = 2\int J(x)\cos(x\delta)\,dx, \quad S = 2\int J(x)\sin(x\delta)dx. \qquad (5.4.8)$$

Deoarece conform celor spuse mai sus $J(x)$ are valori nenule numai pentru $|x| \ll \bar{K}_0$, variaţiile cantităţilor C şi S în funcţie de δ sînt neglijabile în comparaţie cu variaţiile lui cos $(\bar{K}_0\delta)$ şi sin $(\bar{K}_0\delta)$.

Ţinînd cont de acest fapt putem obţine din ecuaţia (5.4.7) valorile extreme ale intensităţii scriind

$$\frac{dI}{d\delta} \simeq -\bar{K}_0[C \sin(\bar{K}_0\delta) + S \cos(\bar{K}_0\delta)] = 0 \qquad (5.4.9)$$

Din ecuaţia (5.4.9) rezultă

$$\cos(\bar{K}_0\delta) = \frac{C}{\pm\sqrt{C^2 + S^2}} \quad \text{şi} \quad \sin(\bar{K}_0\delta) = \frac{S}{\pm\sqrt{C^2 + S^2}} \qquad (5.4.10)$$

care introduse în ecuaţia (5.4.7) conduc la valorile extreme ale lui I.

$$I = P \pm \sqrt{C^2 + S^2}. \qquad (5.4.11)$$

Vizibilitatea franjelor definită prin relaţia

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \qquad (5.4.12)$$

va căpăta, cu ajutorul ecuaţiei (5.4.11), forma

$$V(\delta) = \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{P}. \qquad (5.4.13)$$

În cazul problemei spectrul este simetric, adică $J(x)$ este simetric, deci $S = 0$, integrantul fiind o funcţie impară, astfel încît vizibilitatea devine

$$V = \frac{|C|}{P}. \qquad (5.4.14)$$

În acest caz se vede că funcţia de vizibilitate determină funcţia C pînă la semn şi pînă la factorul de proporţionalitate P. Odată cunoscut C observăm că $J(x)$ se obţine făcînd transformata Fourier a funcţiei $C(\delta)$ conform ecuaţiei (5.4.8).

În cazul problemei,

$$C(\delta) = \text{const. } \exp\left[-\left(\frac{\delta}{2\alpha}\right)^2\right] \cos\left(\frac{\beta}{\alpha}\delta\right) =$$

$$= \text{const. } \exp\left[-\left(\frac{\delta}{2\alpha}\right)^2\right] \frac{\exp\left[i\frac{\beta}{\alpha}\delta\right] + \exp\left[-i\frac{\beta}{\alpha}\delta\right]}{2} \qquad (5.4.15)$$

Luînd transformata Fourier

$$J(x) = \text{const}\left\{\int \exp\left[-\left(\frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 + i\frac{\beta}{\alpha}\delta + ix\delta\right]d\delta + \right.$$

$$\left. + \int \exp\left[-\left(\frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 - i\frac{\beta}{\alpha}\delta + ix\delta\right]d\delta\right\} \qquad (5.4.16)$$

echivalent cu

$$J(x) = \text{const}\left\{\exp\left[-(\alpha x + \beta)^2\right]\int e^{-y^2}\,dy + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-(\alpha x - \beta)^2\right]\int e^{-z^2}\,dz\right\} \qquad (5.4.17)$$

unde am notat

$$y = \left[\frac{\delta}{2\alpha} - i(\alpha x + \beta)\right], \quad z = \left[\frac{\delta}{2\alpha} - i(\alpha x - \beta)\right].$$

Efectuînd integrarea şi ţinînd seama de expresia lui x dată de (5.4.6), ecuaţia (5.4.17) devine:

$$J(K_0) = J_0 \exp\left[-\frac{\left(K_0 - \overline{K}_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\frac{1}{\alpha^2}}\right] + J_0 \exp\left[-\frac{\left(K_0 - \overline{K}_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\frac{1}{\alpha^2}}\right].$$

(5.4.18)

Se observă că ecuația (5.4.18) reprezintă un spectru compus din două linii de formă gaussiană centrate una în punctul $\overline{K}_0 - \frac{\beta}{\alpha}$ iar cealaltă în punctul $\overline{K}_0 + \frac{\beta}{\alpha}$ ambele de aceeași înălțime și de aceeași semilărgime (fig. 5.4R)

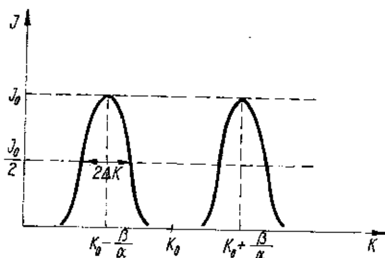


Fig. 5.4R

$$\Delta K_0 = \frac{1}{\alpha} \ln 2,$$

cu alte cuvinte laserul oscilează pe două moduri.

5.5. Ne interesează doar variația temporală a cîmpurilor, deoarece am presupus uniformă iluminarea detectorului de către fiecare fascicul separat. Notînd cu indicii 1 și 2 mărimile care corespund fiecărui fascicul, se poate scrie distribuția cîmpurilor pe placa fotografică. Fie x coordonata de-a lungul căreia ne situăm, la $x = 0$ drumurile optice ale fasciculelor fiind egale (fig. 5.5 R)

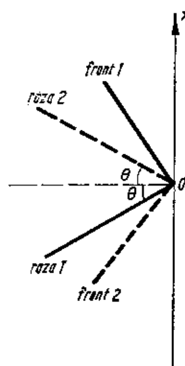


Fig. 5.5R

Diferența de drum între fronturile fasciculelor care ajung la distanța x de centru este

$$\delta = 2x \sin\theta. \qquad (5.5.1)$$

Apar franje de interferență cu „frecvența" spațială

$$\omega = 4\pi \sin\theta/\lambda. \qquad (5.5.2)$$

Dacă viteza undelor este c, se poate scrie distribuția de cîmpuri pe planul fotografiei

$$E(t) = E_1(t - \tau) + E_2(t + \tau) \qquad (5.5.3)$$

$$\tau = \frac{x}{c} \sin\theta. \qquad (5.5.4)$$

Intensitatea este

$$I(x) = \langle E(x, t)\widetilde{E}(x, t)\rangle.$$

Dacă procesul este staţionar, la calculul mediei se poate deplasa originea timpului.

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + \left\langle E_1(t)\tilde{E}_2\left(t + 2\frac{x}{c}\sin\ \theta\right)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle \widetilde{E}_1(t)E_2\left(t + 2\frac{x}{c}\sin\ \theta\right)\right\rangle \quad (5.5.5)$$

unde

$$I_1(x) = \langle E_1(x, t)\ \widetilde{E}_1(x, t)\rangle$$

$$I_2(x) = \langle E_2(x, t)\ \widetilde{E}_2(x, t)\rangle \quad (5.5.6)$$

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\,\mathrm{Re}\left\{\left\langle E_1(t)\widetilde{E}_2\left(t + \frac{2x}{c}\sin\ \theta\right)\right\rangle\right\}.$$

Dacă

$$E_1(x) = E_2(x) \quad (5.5.7)$$

$$I(x) = 2[I_1(x) + \mathrm{Re}\{C(\tau)\}] \quad (5.5.8)$$

$$C(\tau) = C\left(\frac{2x}{c}\,s\theta\sin\right) \quad (5.5.9)$$

este funcţia de autocorelaţie a pulsului.

Gradul de coerenţă este funcţia de autocorelaţie normată

$$\gamma(\tau) = \frac{C(\tau)}{I_1}. \quad (5.5.10)$$

Gradul de coerenţă se poate scrie

$$\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)|\exp i\,[\alpha(\tau) - \omega_0\tau] \quad (5.5.11)$$

$$\alpha(\tau) = \omega_0\tau = \arg\gamma(\tau) \quad (5.5.12)$$

unde ω_0 este frecvenţa medie a pulsului de lumină. Ecuaţia (5.5.8) devine

$$I(x) = 2I_1(x)\{1 + |\gamma(\tau)| \cos[\alpha(\tau) - \omega_0\tau]\} \qquad (5.5.13)$$

$$I_{max} = 2I_1[1 + |\gamma(\tau)|] \qquad (5.5.14)$$

$$I_{min} = 2I_1[1 - |\gamma(\tau)|]. \qquad (5.5.15)$$

Vizibilitatea franjelor este

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \gamma(\tau). \qquad (5.5.16)$$

La iluminarea fotografiei cu laserul continuu, în condiţiile din ipoteză, se formează un fascicul difractat cu „frecvenţa" spaţială $4\pi \sin \theta'/\lambda$ care este egală cu cea a reţelei de difracţie formate pe emulsie de interferenţa pulsurilor (deoarece $\sin \theta'/\lambda' = \sin \theta/\lambda$). Intensitatea fasciculului difractat fiind proporţională cu V^2, rezultă că este proporţională cu pătratul modulului gradului de coerenţă.

Determinînd mărimea τ din (5.5.4) cu ajutorul relaţiei (5.5.11) şi a măsurării intensităţii relative a fasciculului difractat, se poate determina gradul complex de corelaţie $\gamma(\tau)$.

Lungimea de coerenţă L a pulsului laser, se determină măsurînd intervalul x_0 de pe emulsie în care intensitatea difractată scade la un sfert din valoarea de vîrf

$$L = 2x_0 \sin \theta \qquad (5.5.17)$$

5.6. Dacă notăm cu T timpul de observaţie a imaginii de interferenţă, în punctul considerat, atunci funcţia de coerenţă mutuală $\Gamma_{12}(\tau)$ este dată de expresia

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} \widetilde{E}_1(t + \tau)\, \widetilde{E}_2^*(t)\mathrm{d}t. \qquad (5.6.1)$$

Introducînd în relaţia (5.6.1) expresiile lui $\widetilde{E}_1$ şi $\widetilde{E}_2$ obţinem

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} \exp[2\pi i\omega_1(t + \tau)] \exp[-2\pi i\omega_2 t]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\sin 2\pi\Delta\omega T}{2\pi\Delta\omega T} \exp[2\pi i(\omega_1\tau + \Delta\omega t)]. \qquad (5.6.2)$$

Funcţia de coerenţă mutuală, scrisă prin relaţia (5.6.2) ne sugerează că timpul T în care se poate observa interferenţa fasciculelor celor 2 laseri este dat de expresia :

$$T = \frac{1}{4\,\Delta\omega} = \frac{1}{4(474 \cdot 10^{12} - 473{,}9995 \cdot 10^{12})} = 5 \cdot 10^{-10}\ \text{s}.$$

5.7. 1°. Considerăm că a_1 şi a_2 sînt amplitudinile transmise de deschiderile P_1 şi respectiv P_2. Energia, în punctul Q al cîmpului de interferenţă, va fi

$$\langle A\,A^*\rangle = \langle (a_1 + a_2 e^{i\varphi})(a_1^* + a_2^* e^{i\varphi})\rangle =$$

$$= \langle a_1 a_1^*\rangle + \langle a_2 a_2^*\rangle + 2\,Re\,[\langle a_1 a_2^* \exp[-i\varphi]\rangle], \qquad (5.7.1)$$

unde φ este defazajul între oscilaţiile care se propagă în direcţiile P_1Q şi P_2Q. φ fiind independent de timp, nu se va face medierea decît pe cantităţile variabile şi (5.7.1) devine

$$\langle AA^*\rangle = \langle a_1 a_1^*\rangle + \langle a_2 a_2^*\rangle + 2\ \text{Re}\,[\langle a_1 a_2^*\rangle \exp\ [-i\varphi]]. \qquad (5.7.2)$$

Punînd

$$a_1 a_2^* = |a_1 a_2^*| \exp[-i\theta], \qquad (5.7.3)$$

ecuaţia (5.7.2) se va scrie sub forma

$$\langle AA^*\rangle = \langle a_1 a_1^*\rangle + \langle a_2 a_2^*\rangle + 2\ \langle |a_1 a_2^*|\rangle \cos(\varphi + \theta) \qquad (5.7.4)$$

Din relaţia (5.7.4), pentru $\varphi + \theta = 2\ K\pi$, se deduce iluminarea maximă

$$I_{max} = \langle a_1 a_1^*\rangle + \langle a_2 a_2^*\rangle + 2\langle |a_1 a_2^*|\rangle \qquad (5.7.5)$$

şi pentru $\varphi + \theta = (2K + 1)\,\pi$, se deduce iluminarea minimă

$$I_{min} = \langle a_1 a_1^*\rangle + \langle a_2 a_2^*\rangle - 2\langle |a_1 a_2^*|\rangle. \qquad (5.7.6)$$

Definind vizibilitatea prin

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}; \qquad (5.7.7)$$

rezultă

$$V = \frac{2\langle |a_1 \cdot a_2^*|\rangle}{\langle a_1 a_1^* \rangle + \langle a_2 a_2^* \rangle} \qquad (5.7.8)$$

Să considerăm un atom j din sursa S reperat prin coordonatele sale u_j şi v_j, acesta emiţînd o undă de amplitudine $a(t)$. Undele primite din punctele P_1 şi P_2 (figura 5.7.1) se pot reprezenta prin

$$a_{1j} = a_j(t) \exp[-i \cdot 2\pi(u_j x_1 + v_j y_1)] \qquad (5.7.9a)$$

şi, respectiv

$$a_{2j} = a_j(t) \exp[-i2\pi(u_j x_2 + v_j y_2)]. \qquad (5.7.9b)$$

Caracterizăm prin j diverşii atomi ai sursei şi contribuţia tuturor creează în punctele P_1 şi P_2 cîmpurile

$$a_1 = \sum a_j(t) \exp[-i \cdot 2\pi(u_j x_1 + v_j y_1)] \qquad (5.7.10a)$$

şi

$$a_2 = \sum a_j(t) \exp[-i \cdot 2\pi(u_j x_2 + v_j y_2)]. \qquad (5.7.10b)$$

Astfel se deduce

$$\langle a_1 a_2^* \rangle = \sum a_j(t) \exp[-i \cdot 2\pi(u_j x_1 + v_j y_1)] \times$$

$$\times \sum a_K(t) \exp[+i \cdot 2\pi(u_K x_2 + v_K y_2)]. \qquad (5.7.11)$$

Vom ţine seama de produsele relative la un singur atom, cele relative la doi atomi diferiţi fiind nule, deoarece atomii consideraţi emit incoerent. Astfel (5.7.11) devine

$$\langle a_1 a_2^* \rangle = \sum \langle a_j a_j^* \rangle \exp[-i \cdot 2\pi(u_j(x_1 - x_2) + v_j(y_1 - y_2)] \qquad (5.7.12)$$

Densitatea atomilor fiind mare, se poate înlocui suma printr-o integrală şi expresia (5.7.12) se scrie sub forma

$$\langle a_1 a_2^* \rangle = \iint_S U(u, v) \exp[i \cdot 2\pi(u(x_1 - x_2) + v(y_1 - y_2)] \, du \, dv \qquad (5.7.13)$$

unde $U(u, v)$ este energia adusă de elementul de sursă caracterizat prin coordonatele (u, v).

De asemenea, avem

$$\langle a_1 a_1^* \rangle = \langle a_2 a_2^* \rangle = \iint_S U(u, v)\, \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v. \qquad (5.7.14)$$

Astfel, gradul de coerență parțială între radiațiile din punctele P_1 și P_2 se poate scrie sub forma

$$\gamma(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2) = \frac{\iint_S U(u, v) \exp\ [-i \cdot 2\pi\ (u(x_1 - x_2) + v(y_1 - y_2))]\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v}{\iint_S U(u, v)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v} \qquad (5.7.15)$$

2°. Sursa extinsă S din dispozitivul Young emite lumină cuasimonocromatică. La momentul t aceasta dă unde de amplitudine $a_1(t) \cdot \exp\ [i\omega_0 t]$ în punctul P_1 și $a_2(t) \exp\ [i\omega_0 t]$ în punctul P_2.

Amplitudinea în punctul Q, în planul ecranului Σ, datorată lui P_1 este

$$K_1 Q_1(t - \tau_1) \exp\ [i\omega_0\ (t - \tau_1)], \qquad (5.7.16)$$

unde τ_1 este timpul pe care îl face lumina pentru a merge din P_1 în Q și K_1 este un factor de proporționalitate care depinde de diametrul găurii din P_1 și care este invers proporțional cu distanța $P_1 Q$(energia variind cu inversul pătratului distanței). La fel, P_2 produce în Q unda de amplitudine

$$K_2 Q_2 (t - \tau_2) \exp\ [i\omega_0(t - \tau_2)], \qquad (5.7.17)$$

unde τ_2 este timpul făcut de lumină pentru a merge din P_2 în Q.

Conform principiului lui Huygens, undele emise de P_1 și P_2 suferă un avans de fază în raport cu unda emisă de S în P_1 și P_2. Deci, K_1 și K_2 sînt numere imaginare pure. Introducînd notația

$$\tau = \tau_2 - \tau_1 \qquad (5.7.18)$$

cele două unde în punctul Q se scriu

$$u_1(t) = K_1 Q_1 (t) \exp\ [i\omega_0 t)] \qquad (5.7.19)$$

și

$$u_2(t) = K_2 Q_2 (t) \exp\ [i\omega_0 (t + \tau)]. \qquad (5.7.20)$$

În continuare se presupune că diferența de drum $P_2Q - P_1Q = c\tau$ rămîne — tot timpul — mult mai mică decît întinderea trenurilor de undă și că $Q_1(t)$ și $Q_2(t)$ variază lent, adică

$$Q_2(t + \tau) \approx Q_2(t) \tag{5.7.21}$$

Atunci, în punctul Q, semnalul analitic va fi

$$u(t) = K_1Q_1(t) \exp [i\omega_0 t] + K_2Q_2(t) \exp [i\omega_0(t + \tau)]. \tag{5.7.22}$$

Introducînd notația

$$\omega_0\tau = \varphi. \tag{5.7.23}$$

ca diferență de fază în punctul Q între oscilațiile trimise în acest punct din P_1 și P_2, avem

$$u(t) = \{K_1Q_1(t) + K_2Q_2(t) \exp [i\varphi]\} \exp [i\omega_0 t] \tag{5.7.24}$$

Mărimea $|\gamma_{12}(0)|$ din (5.7.15) caracterizează gradul de coerență al radiațiilor emise de punctele P_1 și P_2 iluminate de sursa S. Formula

$$I = I_1 + I_2 + 2(I_1I_2)^{1/2}|\gamma_{12}(0)| \cos (\alpha_{12} - \varphi)$$

din problema 5.1. ne arată că în planul Σ — în care se află punctul Q — variațiile intensității nu se datorează decît variațiilor fazei φ, care duc la franje de interferență. Astfel, avem franje strălucitoare, dacă

$$\alpha_{12} + \varphi = 2K\pi; \quad K = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.7.25}$$

și franje de „contrast”, dacă

$$\alpha_{12} + \varphi = (2K + 1)\pi; \quad K = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.7.26}$$

Definind contrastul franjelor prin

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{5.7.27}$$

avem

$$\gamma = |\gamma_{12}(0)|. \tag{5.7.28}$$

Pentru a cunoaşte contrastul franjelor este necesar să se cunoască gradul de coerenţă $|\gamma_{12}(0)|$ care depinde de întinderea sursei S.

Cu ajutorul expresiilor (5.7.28) şi (5.7.15) se poate face un calcul asupra contrastului franjelor în experienţa lui Young.

Considerînd sursa S circulară şi uniformă, rezultă

$$\gamma_{12}(0) = 2\frac{J_1(z)}{z} \quad (5.7.29)$$

în care

$$= z\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot\alpha\cdot P_1P_2. \quad (5.7.30)$$

iar $J_1(z)$ este funcţia Bessel de ordinul întîi şi α este unghiul sub care se vede raza sursei din punctul P_2 (fig. 5.7., *a*). Contrastul franjelor este dat prin

$$|\gamma_{12}(0)| = \left|2\frac{J_1(z)}{z}\right| \quad (5.7.31)$$

Contrastul franjelor este nul pentru $J_1(z) = 0$, adică, pentru $z = 3{,}82$. Ţinînd seama de (5.7.30), avem

$$P_1P_2 = \frac{1{,}22\cdot\lambda_0}{2\cdot\alpha}. \quad (5.7.32)$$

5.8. 1°. a)

$$\Delta t_c\Delta\omega \approx 2\pi \quad (5.8.1)$$

$$\Delta t_c = \frac{\Delta z}{c} \quad (5.8.2)$$

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\mathscr{E}}{\hbar} = \frac{\Delta\varphi_z c}{h} \quad (5.8.3)$$

Înlocuind (5.8.2) şi (5.8.3) în (5.8.1) se obţine

b)

$$\Delta_z\cdot\Delta p_z \sim h \quad (5.8.4)$$

$$\Delta l_x\Delta\theta_x \leqslant \lambda \quad (5.8.5)$$

$$\lambda = \frac{h}{p_z} \quad (5.8.6)$$

$$\Delta x = \frac{p_x}{p_z} \quad (5.8.7)$$

Cu $\Delta l_x = \Delta x$ (5.8.5) devine

$$\Delta x \frac{p_x}{p_z} = \frac{h}{p_z}$$

$$\Delta x p_x \sim h \qquad (5.8.8)$$

La fel se arată că

$$\Delta y p_y \sim h. \qquad (5.8.9)$$

2°. Pentru o linie lărgită omogen (lorentzian) se demonstrează relația

$$\Delta\omega_L = \frac{2\pi}{T_2} \qquad (5.8.10)$$

unde T_2 este timpul de relaxare transversal.

$$\Delta\omega = 2\Delta\omega_L = \frac{4\pi}{T_2}. \qquad (5.8.11)$$

Din relația de definiție a timpului de coerență (5.8.1) rezultă

$$\Delta t_c = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{T}{2} \qquad (5.8.12)$$

$$\delta = c \cdot \Delta t_c$$

$$\delta = 3 \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-8}}{2} = 15 \text{ m}.$$

Din figura 5.8.1 se aproximează $\Delta\theta_x$ în funcție de parametrii montajului

$$\Delta\theta_x \approx \frac{\Delta L}{d} \qquad (5.8.14)$$

$$\Delta l_x \cdot \frac{\Delta L}{d} \leqslant \lambda \qquad (5.8.15)$$

$$\Delta L \leqslant \frac{\lambda d}{\Delta l_x} \qquad (5.8.16)$$

$$\Delta L \leqslant \frac{0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-1}}{100 \cdot 10^{-6}} = 0{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

4°. Pornindu-se de la definiţia volumului de coerenţă $\Delta V_c = C\tau_c \Delta A_s$ unde τ_c e timpul de coerenţă şi ΔA_s aria sursei emiţătoare considerată coerentă, în care se introduc condiţiile de coerenţă (5.8.1) şi (5.8.5), se obţine

$$\Delta V_c = (2\pi\lambda^2 d^2 c)/\Delta A_s S \Delta\omega \tag{5.8.17}$$

Pentru ca radiaţiile în punctele $R_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $R_2(x_2, y_2, z_2)$ să fie coerentă trebuie să existe relaţia

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \leqslant \Delta V_c. \tag{5.8.18}$$

De aici rezultă distanţa maximă între cele două plane

$$z_2 - z_1 = \frac{2\pi\lambda^2 d^2 c}{\Delta A_s \Delta\omega (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \tag{5.8.19}$$

$$z_2 - z_1 = \frac{(0,6)^2 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^8}{\frac{\pi}{4} \cdot 10^{-8} \frac{2}{\pi T_2} \cdot 10^{-2}} = 7,6 \cdot 10^{-4}\text{m}.$$

5.9. Energia unui puls laser „gigant'' este egală cu produsul dintre numărul de fotoni, n_t, şi energia unui foton transportat

$$\mathscr{E} = n_t \hbar\omega = n_t \hbar c 2\pi\tilde{\nu} \tag{5.9.1}$$

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi c} = 1441800 \text{ m}^{-1}$$

$$n_t = \frac{0,3}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1441800} \approx 1,05 \cdot 10^{20}$$

2°. Fluctuaţiile numărului de fotoni şi ale fazei undei sînt legate între ele prin relaţia de incertitudine

$$\Delta\mathscr{E} \cdot \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{5.9.2}$$

Incertitudinea asupra lui $\mathscr{E}$ se datorează celei asupra lui N, cuanta fiind bine definită ca frecvenţă. Avem, deci

$$\Delta n_t \hbar\omega \cdot \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2} \cdot \tag{5.9.3}$$

Incertitudinea Δt asupra timpului este legată de incertitudinea $\Delta\varphi$ asupra fazei. Adică, ţinînd seama de

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{t}{T} = \frac{\omega}{2\pi} t \tag{5.9.4}$$

rezultă

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t \tag{5.9.5}$$

şi

$$\Delta N \cdot \Delta\varphi \geqslant \frac{1}{2} \tag{5.9.6}$$

Dacă $\Delta n_t = \sqrt{\overline{n_t}}$, atunci

$$\Delta\varphi \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\overline{n_t}}}. \tag{5.9.7}$$

3°. Deoarece $\Delta n_t = \sqrt{\overline{n_t}} \approx 10^{10}$ este foarte mare, $\Delta\varphi$ este foarte mic. Deci, pentru frecvenţe care corespund undelor de lungime de undă relativ ridicată (roşu), aspectul ondulatoriu este preponderent.

4°. Impulsul laser este reprezentat prin

$$u(t) = A \cos \omega_0 t, \quad \left(-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}\right). \tag{5.9.8}$$

La aceasta asociem mărimea complexă

$$u_c(t) = A \exp[-i\omega_0 t] \tag{5.9.9.}$$

şi spectrul de frecvenţă corespunzător este

$$G(\omega) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\omega - \omega_0) t] \, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{A}{\omega - \omega_0} \left| \exp[i(\omega - \omega_0) t] \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = A\tau \frac{\sin(\omega - \omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega - \omega_0)\frac{\tau}{2}} \tag{5.9.10}$$

5°. Primele două zerouri pentru $G(\omega)$ au loc pentru

$$(\omega - \omega_0)\frac{\tau}{2} = \pm\pi. \tag{5.9.11}$$

Semiintervalul între aceste valori corespunde domeniului de frecvențe

$$\omega - \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} \qquad (5.9.12)$$

Deoarece

$$\widetilde{\nu} = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{c} \qquad (5.9.13)$$

avem

$$\widetilde{\nu} - \widetilde{\nu}_0 = \frac{1}{c\tau} \qquad (5.9.14)$$

6°. $\widetilde{\nu} = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{c}$ și $L = c\tau$ deci

$$\Delta\widetilde{\nu} = \widetilde{\nu} - \widetilde{\nu}_0 = \frac{1}{L} \qquad (5.9.15)$$

7°. $\Delta\widetilde{\nu} = \frac{1}{c\tau} = \frac{1}{3\cdot 10^8\cdot 10^{-4}} = 0{,}33\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^{-1} = 3{,}3\,\mathrm{mKayser}$

$\Delta\lambda = \lambda^2\cdot\Delta\widetilde{\nu} = (6{,}9359\cdot 10^{-7})^2\cdot 0{,}33\cdot 10^{-4} = 1{,}59\cdot 10^{-17}\,\mathrm{m} =$
$= 1{,}59\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m\AA}$

8°. $L = \frac{1}{\Delta\widetilde{\nu}} = \frac{1}{0{,}33\ldots 10^{-4}} = 3\cdot 10^4\,\mathrm{m}.$

Deci, nu se vor observa franje de interferență într-un interferometru Michelson cînd distanța între oglinzi este de ordinul lui $\frac{L}{2}$, adică de circa 10 km; de fapt, nu se pot obține traiectorii optice omogene pe distanțe așa de lungi.

9°. Volumul ocupat de trenul de unde este

$$V = \frac{\pi d^2}{4}L = 59\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3.$$

Densitatea de energie va fi

$$u = \frac{\mathscr{E}}{V} = \frac{0{,}3}{59\cdot 10^{-2}} = 0{,}508\,\mathrm{J\cdot m^{-3}}$$

10°. Expresia densității de energie în teoria electromagnetică este

$$u = \varepsilon_0 E^2.$$

Deci

$$E = \sqrt{\frac{u}{\varepsilon_0}} = \sqrt{0{,}508 \cdot 36 \cdot 10^9} \approx 2{,}4 \cdot 10^5 V \cdot \mathrm{m}^{-1}.$$

11°. Presiunea radiației sub incidență normală este

11°. a) $p = u = 0{,}508 \ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

11°. b) $p = 2u = 1{,}016 \ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

11°. c) $p = (1 + \mathscr{R})\, u = 1{,}9\, u = 0{,}965 \ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}.$

5.10. 1°. $\Delta\omega_D = \frac{\omega_0}{c}\left(\frac{2\,kT}{m} \ \ln\ 2\right)^{1/2} = 3{,}58 \cdot 10^{-7}\, \omega_0 \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2}$

unde m este masa unui atom de neon, iar M masa atomică a neonului

Deci

$$\Delta\omega_D = 3{,}58 \cdot 10^{-7} \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}15 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{500}{20}\right)^{1/2} \approx 460 \ \mathrm{M\ Hz}.$$

$$2°.\ \ \Delta\omega_C = \frac{c(1 - \mathcal{R})}{2\pi n_r l \mathcal{R}^{1/2}} \approx \frac{c(1 - \mathcal{R})}{2\pi n_r l} = \frac{3 \cdot 10^8 (1 - 0{,}996)}{2\pi \cdot 1} \approx 0{,}18 \ \mathrm{MHz}$$

$$3°.\ \ Q = \frac{\omega}{\Delta\omega_c} = \frac{\frac{3}{1{,}15} \cdot 10^{11}}{1{,}8 \cdot 10^5} \approx 1{,}3 \cdot 10^9$$

$$4°.\ \ \Delta\omega_M = \frac{2\pi\hbar\omega(\Delta\omega_c)^2}{\mathcal{P}} = \frac{2\pi \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-34}\, \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}15 \cdot 10^{-6}} (1{,}8 \cdot 10^5)^2}{10^{-3}} \approx 0{,}4 \ \mathrm{MHz}$$

$$5°.\ \ q = \frac{\Delta\omega_D}{\Delta\omega_r} = \frac{\Delta\omega_D}{\frac{c}{2\, n_r l}} = \frac{460 \cdot 10^6 \cdot 2}{3 \cdot 10^8} \approx 3$$

$$6°.\ \ \Delta\omega_L = \frac{1}{2\pi\tau_{21}} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-8}} \approx 16 \ \mathrm{MHz}$$

$$7°.\ \ \Delta\omega_0 = \frac{(N_2/g_2 - N_1/g_1)/N_2/g_2}{4\pi\hbar(\Delta\omega_c)^2} \cdot P = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-34} (1{,}8 \cdot 10^5)^2} \approx 4 \cdot 10^{19}$$

$$8°.\ \ S = \frac{\omega}{\Delta\omega_D} = \frac{\frac{3 \cdot 10^8}{1{,}15 \cdot 10^{-6}}}{460 \cdot 10^6} \approx 6 \cdot 10^5.$$

5.11. 1°. Atomii staționari ai unui gaz emit sau absorb radiația cu o frecvență cuprinsă într-o bandă spectrală foarte îngustă ce are maximul la ω_0, şi a cărei lărgime naturală e dată de emisia spontană.

Frecvențele atomilor în mişcare sînt modificate de efectul Doppler care provoacă o lărgire mult mai mare a liniei spectrale decît cea dată de emisia spontană. Dacă viteza atomilor după direcția de observație este u şi viteza luminii c, frecvența observată, pînă la primul ordin al lui $\frac{u}{c}$, este

$$\omega = \omega_0 \left(1 \pm \frac{u}{c}\right) \tag{5.11.1}$$

unde semnul plus se referă la atomii ce se apropie de observator, iar cel minus la cei ce se îndepărtează. Din (5.11.1) putem explicita viteza u

$$u = (\omega - \omega_0) \frac{c}{\omega_0} \tag{5.11.2}$$

şi atunci

$$\mathrm{d}u = \frac{c}{\omega_0} \mathrm{d}\omega. \tag{5.11.3}$$

Probabilitatea ca un atom de masă m, aflat într-un gaz la temperatura T să aibă viteza cuprinsă între u și $u + \mathrm{d}u$ e dată de distribuția după viteza a lui Maxwell

$$P(u)\,\mathrm{d}u = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{mu^2}{2kT}\right] \mathrm{d}u. \tag{5.11.4}$$

Distribuția Maxwell se aplică doar la echilibru termodinamic, dar abaterea de la aceasta a descărcării în gaz în condițiile care ne interesează, e neglijabilă, chiar pentru atomii aflați pe nivelul laser superior.

Probabilitatea ca frecvența emisă în direcția lui u să se afle în domeniul ω, $\omega + \mathrm{d}\omega$ este

$$P(\omega - \omega_0)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \left\{\exp\left[-\frac{mc^2}{2kT\omega_0^2}(\omega - \omega_0)^2\right]\right\}\frac{c}{\omega_0}\,\mathrm{d}\omega. \tag{5.11.5}$$

Aceasta e fracţiunea din numărul total al atomilor care emit sau absorb în direcţia de observaţie. Deoarece intensitatea e proporţională cu numărul emiţătorilor urmează ca

$$I = I_0 \exp\left[-\frac{m}{2kT}\frac{c^2}{\omega_0^2}(\omega - \omega_0)^2\right] \qquad (5.11.6)$$

unde I_0 este intensitatea la $\omega=\omega_0$. Forma profilului lărgirii Doppler este gaussiană.

Lărgimea liniei Doppler $\Delta\omega_D$ este definită ca intervalul de frecvenţă cuprins între valorile corespunzătoare intensităţii egală cu jumătate din valoarea sa maximă. Deci

$$\ln\frac{I}{I_0} = \ln\frac{1}{2} = -\frac{m}{2kT}\frac{c^2}{\omega_0^2}\Delta\omega_D^2 \qquad (5.11.7)$$

şi

$$\Delta\omega_D = 2\omega_0\left(\frac{2kT}{mc^2}\ln 2\right)^{1/2}. \qquad (5.11.8)$$

În cazul neonului

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^8}{6328\cdot 10^{-10}} = 3\cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$$

şi

$$\Delta\omega_D = 2.3\cdot 10^{15}\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300\cdot 6{,}024\cdot 10^{26}}{20\cdot 9\cdot 10^{16}}\cdot 0{,}69} = 6{,}2\cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Lărgimea Doppler se poate exprima şi în lungimi de undă sub forma

$$\Delta\lambda_D = 2\lambda_0\sqrt{\frac{2kTN_A}{Mc^2}\ln 2} = 2\cdot 6328\cdot 10^{-10}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-6} = 0{,}13\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

2°. Ecuaţia (5.11.5) se poate scrie şi sub forma

$$P(\omega - \omega_0) = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\,\Delta\omega_D}\exp\left[-\frac{4\ln 2(\omega-\omega_0)^2}{(\Delta\omega_D)^2}\right] \qquad (5.11.9)$$

unde am înlocuit din (5.11.8) pe

$$\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} = \frac{2\omega_0\sqrt{2\ln 2}}{c\Delta\omega_D}. \qquad (5.11.10)$$

Coeficientul de amplificare pe unitatea de lungime e definit ca

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{I} \frac{dI}{dx} \qquad (5.11.11)$$

şi are expresia

$$\alpha(\omega) = \alpha(\omega_0) \exp \left[- \frac{4 \ln 2(\omega - \omega_0)^2}{(\Delta\omega_D)^2} \right] \qquad (5.11.12)$$

care este funcţia de distribuţie Gauss şi este reprezentată în figura (5.11R, a).

3°. Vom considera radiaţia spontană emisă de o singură particulă izolată şi vom arăta că e împrăştiată într-un domeniu de frecvenţe. Procesul considerat e o lărgire naturală şi se poate aplica aproximaţia clasică.

Considerăm un dipol, constînd dintr-un electron şi un nucleu (oscilator Lorentz) care oscilează şi radiază energie cu o rată dată de

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = - \frac{2e^2(\dot{v})^2}{4\pi\varepsilon \cdot 3c^3} \qquad (5.11.13)$$

unde e este sarcina electronului şi $\dot{v}$ acceleraţia sa. Pierderea de energie poate fi egalată cu lucrul mecanic executat pe secundă de o forţă de reacţiune radiativă, astfel că

$$\bar{F} \cdot \bar{v} = - \frac{2e^2(\dot{v})^2}{4\pi\varepsilon \cdot 3c^3} \qquad (5.11.14)$$

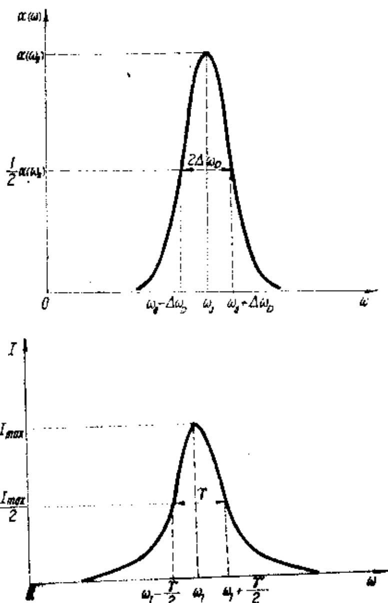


Fig. 5.11R a, b

Pentru a afla forța medie într-un ciclu integrăm prin părți relația

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(F - \frac{2e^2\ddot{v}}{4\pi\varepsilon \cdot 3c^3}\right) v\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon \cdot 3c^2}\, v \cdot \dot{v}\right]_{t_1}^{t_2}. \qquad (5.11.15)$$

Dacă diferența $t_2 - t_1$ este egală cu o perioadă, mărimea din paranteza pătrată are aceeași valoare la t_2 și t_1 astfel că membrul drept e nul și

$$F_{medie} = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon \cdot 3c^3}\,\ddot{v} \qquad (5.11.16)$$

Fie x deplasarea electronului din dipol, viteza $v = \dot{x}$ și $\ddot{v} = \dddot{x}$. Ecuația de mișcare a electronului de masă m, este

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon \cdot 3c^3}\,\dddot{x} \qquad (5.11.17)$$

unde $(-kx)$ este forța elastică ce acționează asupra oscilatorului. Forța de reacțiune e mult mai mică decît forța elastică și deplasarea x e dată aproximativ de

$$x \approx x_0 \exp\,[-i\omega_0 t] \qquad (5.11.18)$$

de unde

$$\dddot{x} = -\omega_0^2\dot{x}$$

și, în final, pentrucă $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, obținem ecuația

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (5.11.19)$$

unde γ este constanta de amortizare clasică, dată de expresia

$$\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{4\pi\varepsilon \cdot 3c^3 m} \qquad (5.11.20)$$

iar ω_0 este frecvența unghiulară a electronului ce oscilează.

Soluția ecuației (5.11.19) este

$$x = A\,\exp\left[-\frac{\gamma t}{2}\right]\exp\,[i\omega_1 t] \qquad (5.11.21)$$

unde $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$ și A este o amplitudine.

Pentru a găsi domeniul de frecvențe al radiației emise de oscilatorul clasic amortizat, scriind din analiza Fourier că pentru $t \geqslant 0$ $f(t) = A \exp\left[-\frac{\gamma t}{2}\right] \exp(i\omega_1 t)$, obținem

$$\alpha(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\gamma t}{2} + i(\omega_1 - \omega_0) t\right] dt =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\exp\left[-\frac{\gamma t}{2}\right] \exp[i(\omega_1 - \omega)t]}{i\left(\omega_1 - \omega + i\frac{\gamma}{2}\right)} \right|_0^\infty = \frac{iA}{\sqrt{2\pi}\left(\omega_1 - \omega + i\frac{\gamma}{2}\right)}. \quad (5.11.24)$$

Distribuția intensității e dată, în funcție de frecvență, de ecuația

$$I = \alpha(\omega)\ \alpha^*(\omega) = \frac{A^2}{2\pi\left[(\omega_1 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right]}. \quad (5.11.25)$$

Aceasta este o curbă de rezonanță cu un maxim la ω_1 a cărei valoare scade la jumătate pentru $\omega = \omega_1 \pm \frac{\gamma}{2}$ (fig. 5.11R, b)

Se vede că semilărgimea naturală $\Delta\omega_L = \gamma$. Intensitatea, avînd dependența $I \sim \exp(-\gamma t)$, valoarea ei scade de e ori față de valoarea inițială într-un timp $\tau = \gamma^{-1}$, unde τ este timpul mediu de viață al stării excitate.

4°. $$\Delta\omega_L = \gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{4\pi\varepsilon \cdot 3c^3 m} = \frac{2 \cdot 2{,}56 \cdot 10^{-38} \cdot 9 \cdot 10^{30}\ 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 27 \cdot 10^{24} \cdot 9 \cdot 10^{-31}} = 8 \cdot 10^8\ \mathrm{Hz}.$$

Se vede că $\frac{\Delta\omega_D}{\Delta\omega_L} = \frac{6{,}2 \cdot 10^9}{8 \cdot 10^8} \approx 8.$

Din principiul de incertitudine se scrie

$$\Delta\omega_L \cdot \tau \sim 1, \quad \text{de unde} \quad \tau \sim \frac{1}{\Delta\omega_L} = 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

valoare verificată de experiență.

5.12. Undele emise de atomi sînt reprezentate prin trenuri de undă, procesul de emisie avînd o durată finită. Un tren de undă puţin amortizat este apropiat de o oscilaţie armonică, adică, este monocromatic, iar un tren de undă puternic amortizat corespunde la o oscilaţie nearmonică simplă, adică, la o radiaţie nemonocromatică.

Presupunem — în cele ce urmează — că toate trenurile de undă emise de o sursă de radiaţii au aceeaşi durată τ, în timpul căreia oscilaţia $u_r(t)$ este o sinusoidă de frecvenţă ω_0

$$u_r(t) = \cos \omega_0 t\,; \;\; |t| \leqslant \frac{\tau}{2} \tag{5.12.1}$$

şi

$$u_r(t) = 0\,; \;\; |t| > \frac{\tau}{2}. \tag{5.12.2}$$

Transformata Fourier $u(\omega)$, adică spectrul lui $u_r(t)$, va fi

$$u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_r(t) \;\; \exp\,[-i\omega t]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\,\tau\,\frac{\sin \frac{1}{2}\,(\omega_0 - \omega)\tau}{\frac{1}{2}\,(\omega_0 - \omega)\tau} + \frac{1}{2}\,\tau\,\frac{\sin \frac{1}{2}\,(\omega_0 + \omega)\tau}{\frac{1}{2}\,(\omega_0 + \omega)\tau}. \tag{5.12.3}$$

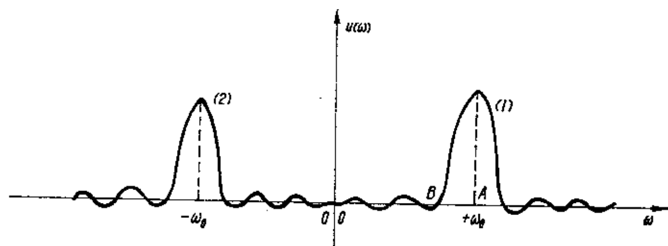


Fig. 5.12R

Relaţia (5.12.3) se reprezintă grafic prin (fig. 5.12R)

$$AB = \Delta\omega = \omega_0 - \omega = \frac{1}{\tau_0}. \tag{5.12.4}$$

Pentru o radiaţie monocromatică, avem

$$OA \gg AB \qquad (5.12.5)$$

sau

$$\Delta\omega \ll \omega_0.$$

Deci, spectrul de frecvenţă este destul de îngust pentru ca cele două linii (1) şi (2) să nu se poată atinge — în mod practic — una pe cealaltă. Timpul τ_c dat de (5.12.4) poartă numele de timp de coerenţă. Punînd

$$l = c\tau_c \qquad (5.12.6)$$

şi ţinînd seama de faptul că $\lambda = 2\pi\, c\omega^{-1}$, rezultă

$$\Delta\lambda = 2\pi c \frac{\Delta\omega}{\omega^2} = \frac{\Delta\omega}{2} \frac{\lambda^2}{c}. \qquad (5.12.7)$$

În final, avem

$$l = 2\pi c \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}, \qquad (5.12.8)$$

l fiind lungimea de coerenţă.

În cazul liniei $\lambda = 5461$ Å a Hg, avem:

$$l = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = \frac{(5461\cdot10^{-10})^2}{10^{-12}} = 0{,}2982\ \text{m}$$

În cazul liniei laser cu He-Ne, $\lambda = 6328$Å, avem

$$l = 2\pi c \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{2\pi\cdot3\cdot10^8}{2\pi\cdot10^4} = 3\cdot10^4\ \text{m}.$$

5.13. 1°. Pentru modurile cu indici mici, dependenţa funcţiilor proprii de polinoamele Hermite se poate neglija faţă de exponenţială (pentru modul fundamental $H_0(x) = 1$, iar pentru TE_{11}, $H_1(x) = 2x$). Rezultă imediat diametrul fasciculului pe oglindă, notat cu $w\left(\frac{b}{2}\right)$

$$w\left(\frac{b}{2}\right) [illegible] \pi \qquad (5.13.1)$$

Pentru datele problemei

$$w\left(\frac{b}{2}\right) \simeq 0{,}46 \text{ mm}.$$

Diametrul fasciculului rezultă, la ieşirea din laser, de aproximativ 0,9 mm.

2°. Pentru a deduce expresia generală a diametrului fasciculului, în funcţie de coordonata z, măsurată de la planul focal, ar trebui cunoscută distribuţia cîmpului electric nu numai pe oglinzi, ci în toată cavitatea. Rezultatul obţinut în acest fel este

$$w(z) = \sqrt{\frac{b\lambda}{2\pi}}\left[1 + \left(\frac{2}{b}\right)^2 z^2\right]^{1/2}. \qquad (5.13.2)$$

Vom obţine aceeaşi relaţie pe o cale mai simplă. Admitem că există în cavitate o valoare a lui z pentru care diametrul fasciculului este minim, w_{min}. În acest punct, „traiectoriile" fotonilor sînt cuprinse între $-w_{min}$ şi $+w_{min}$. Există şi un domeniu de înclinări ale „traiectoriilor", între $-w'_{min}$ şi $+w'_{min}$. Intuitiv, să admitem că înclinarea maximă o au razele care se mişcă de-a lungul axei sistemului, iar cele care au o abatere radială maximă ($\pm w_{min}$) sînt paralele cu axa. Putem să reprezentăm grafic abaterile unghiulare în funcţie de cele radiale sub forma unei elipse (forma rezultă din considerente de continuitate şi de paritate a funcţiei în ambele variabile) (fig. 5.13R).

Ecuaţia elipsei se scrie parametric

$$\begin{aligned} w &= w_{min} \cos \varphi \\ w' &= w'_{min} \sin \varphi. \end{aligned} \qquad (5.13.3)$$

Variaţia lui w în funcţie de z va fi

$$w(z) = w_{min} \cos \varphi + z w'_{min} \sin \varphi \qquad (5.13.4)$$

Elipsa se va roti păstrîndu-şi aria (aceasta rezultă din existenţa invariantului Lagrange-Helmholtz). Aflînd maximul funcţiei $w = w(w')$, cu z ca parametru, rezultă diametrul fasciculului pentru

un z oarecare (din figură se vede clar că diametrul fasciculului este dat de maximul funcţiei). Considerînd (5.13.4) ca o funcţie de φ, se poate deriva în raport cu φ

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} = -\,w_{min}\sin\varphi_0 + zw'_{min}\cos\varphi_0 = 0$$

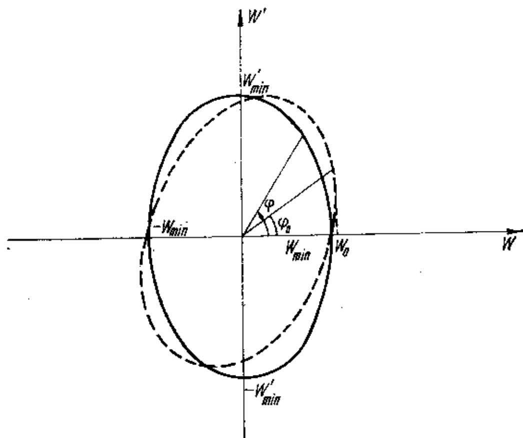


Fig. 5.13.R

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = z\frac{w'_{min}}{w_{min}}$$

$$w(z) = w_{min}\left[1 + \left(\frac{w'_{min}}{w_{min}}\right)^2 z^2\right]^{1/2}. \qquad (5.13.5)$$

Cunoscînd valoarea $w\left(\frac{b}{2}\right)$, rezultă uşor

$$w_{min} = \sqrt{\frac{b\lambda}{2\pi}}; \qquad (5.13.6)$$

w'_{min} se deduce din condiția pe care o satisface traiectoria cea mai înclinată, de a nu ieși din fascicul

$$w'_{min} = \frac{2w_{min}}{b}. \tag{5.13.7}$$

În planul focal, dimensiunea fasciculului este minimă

$$w_{min} = \sqrt{\frac{b\lambda}{2\pi}} = 0{,}32 \qquad \text{(mm)}.$$

3°. La 0,1 m de la ieșirea din laser, fasciculul are un diametru

$$d_{0,1m} = 1 \text{ mm}.$$

La 10 m de la ieșirea din laser, fasciculul are un diametru

$$d_{10\,m} = 13{,}5 \text{ mm}.$$

5.14. 1°. Fotonii emiși de corpul negru din cavitate se supun statisticii Bose-Einstein și deci densitatea de energie radiată pe unitatea de lungime a cavității este

$$u_\omega \, \mathrm{d}\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right] - 1} \frac{1}{L} \mathrm{d}M \tag{5.14.1}$$

unde dM este numărul de moduri de oscilație ale cavității, cu frecvențe unghiulare cuprinse între ω și $\omega + \mathrm{d}\omega$.

Condițiile ca oscilațiile de frecvențe cuprinse în intervalul $(\omega, \omega + \mathrm{d}\omega)$ să fie moduri proprii ale cavității, sînt

$$\frac{N\lambda}{2} = L, \quad N = \frac{L}{c} \frac{\omega}{\pi}$$

$$\frac{(N + dN)(\lambda + \mathrm{d}\lambda)}{2} = \lambda_1 N + \mathrm{d}N = \frac{L}{c\pi}(\omega + \mathrm{d}\omega)$$

$$\mathrm{d}N = \frac{L}{c\pi} \mathrm{d}\omega.$$

Deoarece există două direcţii de polarizare

$$dN = 2\frac{L}{c\pi}d\omega \qquad (5.14.2)$$

$$u_\omega d\omega = \frac{2}{\pi c}\frac{\hbar\omega d\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right]-1}. \qquad (5.14.3)$$

Energia din toate modurile axiale, raportată la unitatea de lungime, este

$$\mathscr{E} = \frac{2}{\pi c}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega d\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right]-1} = \frac{\pi(kT)^2}{3\hbar c} \quad [\mathrm{J/m}]. \qquad (5.14.4)$$

Integrala se rezolvă astfel

$$I = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}dx}{1-e^{-x}} = \int_0^\infty xe^{-x}\sum_{n=0}^\infty e^{-nx}dx = \sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty xe^{-nx}dx.$$

Integrînd prin părţi

$$I = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2°. Considerăm lampa cu mercur un corp negru şi deci putem scrie din legea lui Planck,

$$\mathscr{S}_\omega d\omega = \frac{c}{4\pi^3}\frac{\hbar\omega^3 d\omega}{c^3\left(\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right]-1\right)}. \qquad (5.14.5)$$

Puterea care trece în lungul rezonatorului se află înmulţind densitatea de energie pe unitatea de lungime cu viteza de propagare a undelor. Puterea laserului cu He — Ne va fi, după (5.14.3)

$$\mathscr{P}_\omega d\omega = u_\omega c\, d\omega = \frac{2}{\pi}\frac{\hbar\omega d\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right]-1}. \qquad (5.14.6)$$

Din compararea relațiilor (5.14.5) și (5.14.6) rezultă

$$\mathscr{S}_\omega = \frac{1}{2}\frac{\mathscr{P}_\omega}{\lambda^2}. \tag{5.14.7}$$

Strălucirea laserului cu Ne—He este

$$\mathscr{S}_\omega \approx 2,5 \cdot 10^{-5} \mathrm{W/cm^2}$$

$$\frac{\mathscr{S}_\omega(\mathrm{He-Ne})}{\mathscr{S}_\omega(\mathrm{Hg})} > 1000.$$

Raportată la intervalul de frecvențe, strălucirea laserului este mult mai mare decît cea a lămpii cu mercur. Factorul 10^3 dă numai o imagine asupra deosebirii dintre ele, deoarece lampa cu mercur emite pe un interval mai larg, iar strălucirea ei de 250 W/cm² se referă la tot spectrul vizibil.

Observație. La punctul 1° am făcut două aproximații : sumarea după numărul modurilor a fost înlocuită cu o integrare, iar limita inferioară a integralei a fost zero în loc de $\frac{\hbar\omega_{min}}{kT} = \frac{\pi c}{L}\frac{\hbar}{kT}$.

Ambele aproximații se justifică prin valoarea foarte mică a variației mărimii $\frac{\hbar\omega}{kT}$ de la un mod de oscilație la următorul. Pentru o lungime a cavității $L = 1$ m, se obține

$$\Delta\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) = \frac{\hbar\omega_{min}}{kT} = 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ (la 300°K)}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{e^x - 1} = \int_0^{\frac{\hbar\omega_{min}}{kT}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1 + x + \cdots) - 1} + \int_{\frac{\hbar\omega_{min}}{kT}}^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{e^x - 1} = \frac{\hbar\omega_{min}}{kT} + \int_{\frac{\hbar\omega_{min}}{kT}}^\infty \frac{xe^x\,\mathrm{d}x}{e^x - 1}.$$

Valoarea adevărată a integralei, diferă de $\frac{\pi^2}{6}$ cu $6,2 \cdot 10^{-4}$. Eroarea asupra calculului energiei este mai mică de 10^{-3}.

5.15. Fie I_0 intensitatea razei laser în rezonator înainte de a intra în plăcuța rotitoare (notată cu (1) pe figura 5.15R); $\mathscr{R}_m$ și $\mathscr{T}_m$ factorii de reflexie și respectiv, de transmisie ai oglinzii de extracție. Din datele problemei avem $\mathscr{R}_m = 0{,}99$ și $\mathscr{R}_m + \mathscr{T}_m = 1$ adică

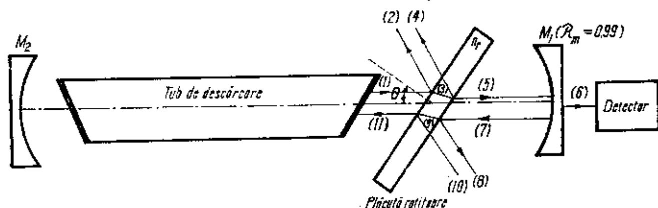


Fig. 5.15.R

$\mathscr{T}_m = 1{,}00 - 0{,}99 = 0{,}01$. Factorul de reflexie, $\mathscr{R}$, al suprafețelor plăcuței rotitoare depinde de poziția ei, θ, prin relația lui Fresnel

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}(\theta) = \frac{\operatorname{tg}^2\left[\theta - \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{n_r}\right)\right]}{\operatorname{tg}^2\left[\theta + \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{n_r}\right)\right]} \qquad (5.15.1)$$

unde n_r este indicele de refracție al plăcuței.

În cazul problemei de față

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}(65^\circ) = \frac{\operatorname{tg}^2\left[65^\circ - \arcsin\left(\frac{\sin 65^\circ}{1{,}5}\right)\right]}{\operatorname{tg}^2\left[65^\circ + \arcsin\left(\frac{\sin 65^\circ}{1{,}5}\right)\right]} \approx 0{,}02. \qquad (5.15.2)$$

Pe figura 5.15R se observă că razele reflectate și transmise au intensitățile: raza (2) are intensitatea $I_{(2)} = I_0\mathscr{R}$, raza (3) are intensitatea $I_{(3)} = I_0 - I_{(2)} = I_0(1 - \mathscr{R})$, raza (4) are intensitatea $I_{(4)} = I_{(3)}\mathscr{R} = I_0\mathscr{R}(1 - \mathscr{R})$; analog rezultă $I_{(5)} = I_0(1 - \mathscr{R})^2$, $I_{(6)} = I_0\mathscr{T}_m(1 - \mathscr{R})^2$, $I_{(7)} = I_0\mathscr{R}_m(1 - \mathscr{R})^2$, $I_{(8)} = I_0\mathscr{R}_m\mathscr{R}(1 - \mathscr{R})^2$, $I_{(9)} = I_0\mathscr{R}_m(1 - \mathscr{R})^3$, $I_{(10)} = I_0\mathscr{R}_m\mathscr{R}(1 - \mathscr{R})^3$ și $I_{(11)} = I_0\mathscr{R}_m(1 - \mathscr{R})^4$.

Prin urmare, puterea maximă extrasă prin oglinda cu $\mathscr{R}_m = 0{,}99$ are expresia

$$\mathscr{P} = I_0 \mathscr{T}_m (1 - \mathscr{R})^2. \tag{5.15.3}$$

Oglinda de extracţie cu reflexie optimă, $\mathscr{R}_{op}$, trebuie să fie echivalentă din punct de vedere al reflexiei cu sistemul format din oglinda de extracţie cu $\mathscr{R}_m$ şi plăcuţa plan paralelă aşezată la unghiul θ pentru care s-a detectat putere maximă. Cu alte cuvinte, trebuie ca puterea extrasă prin oglinda cu reflexie optimă să fie

$$\mathscr{P}_{op} = I_{(1)} - I_{(11)} = I_0 - I_0 \mathscr{R}_m (1 - \mathscr{R})^4 \quad \text{sau}$$

$$\mathscr{P}_{op} = I_0 [1 - \mathscr{R}_m (1 - \mathscr{R})^4]. \tag{5.15.4}$$

Din relaţiile (5.15.3) şi (5.15.4) avem

$$\mathscr{P}_{op} = \frac{\mathscr{P}[1 - \mathscr{R}_m (1 - \mathscr{R})^4]}{\mathscr{T}_m (1 - \mathscr{R})^2} \tag{5.15.4}$$

iar factorul de reflexie al oglinzii echivalente $\mathscr{R}_{op}$ este legat de factorul de reflexie $\mathscr{R}_m$ prin relaţia

$$\mathscr{R}_{op} = \mathscr{R}_m [1 - \mathscr{R}(\theta)] \tag{5.15.6}$$

Numeric relaţiile (5.15.5) şi (5.15.6) dau

$$\mathscr{R}_{op} = 0{,}99 \left\{ 1 - \frac{\mathrm{tg}^2 \left[65^\circ - \arcsin \left(\frac{\sin 65^\circ}{1{,}5} \right) \right]}{\mathrm{tg}^2 \left[65^\circ + \arcsin \left(\frac{\sin 65^\circ}{1{,}5} \right) \right]} \right\} \approx 0{,}97.$$

6.1. 1°. $$\rho = 1{,}22 \frac{\lambda}{d} = 1{,}69 \cdot 10^{-4} \text{ mm}. \tag{6.1.1.}$$

2°.1. Masa semisferei de oţel considerată, este

$$M = \frac{2}{3} \pi r^3 \delta \tag{6.1.2.}$$

δ fiind masa volumică şi r — raza (fig. 6.1R). Astfel

$$M = \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-6} \cdot 7{,}83 \cdot 10^{-3} = 16{,}9 \cdot 10^{-9} \text{ kg}.$$

Cantitatea de căldură necesară pentru a ajunge de la temperatura ordinară la temperatura de fuziune este

$$Q = Mc\Delta t = 16{,}9 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}11 \cdot 4{,}18\ (1525 - 25) = 1{,}14 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

2°. 2. În timpul unui impuls, lama primeşte cantitatea de energie

$$0{,}3 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}1 = 2{,}25 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

Ca atare, lama va fi găurită în locul în care o atinge radiaţia

6.2. 1°. Dacă presupunem că în timpul sudurii nu au loc pierderi de energie, căldura minimă, Q_{min}, necesară pentru a topi o lungime $l = d = 0{,}3$ mm din capetele celor două fire este dată de relaţia

$$Q_{min} = \frac{\pi d^2}{4} \mathrm{d} \cdot \rho \cdot H. \quad (6.2.1)$$

Această căldură este luată din energia pulsului laser, $\mathscr{E}_{min}$, care în parte se reflectă la suprafaţa de impact în conformitate cu relaţia

$$Q_{min} = (1 - \mathscr{R})\ \mathscr{E}_{min}. \quad (6.2.2)$$

Din relaţiile (6.2.1) şi (6.2.2) obţinem

$$\mathscr{E}_{min} = \frac{1}{1 - \mathrm{R}} \frac{\pi d^2}{4} d \cdot \rho \cdot H. \quad (6.2.3)$$

Numeric, din relaţia (6.2.3) obţinem

$$\mathscr{E}_{min} = \frac{1}{0{,}20} \cdot \frac{\pi (3 \cdot 10^{-4})^3}{4} 10^{10} \approx 0{,}8 \text{ J} \quad (6.2.4)$$

2°. Cînd durata impulsului este destul de mare încît căldura furnizată de pulsul laser se poate transmite şi în restul materialului,

atunci pulsul este neeficient pentru topire. În acest caz energia totală a pulsului trebuie să fie mult mai mare decît valoarea minimă calculată mai sus. Pe de altă parte, dacă durata pulsului este foarte mică în locul de impact va avea loc o evaporare excesivă a materialului. Durata maximă a impulsului, $T_{p\,max}$, pentru a avea loc o topire eficientă depinde de diametrul spotului focal laser, care în cazul nostru trebuie să fie egal cu diametrul firului pentru a-l suda uniform, și de difuzivitatea termică, prin relația

$$\tau_{max} = \frac{d^2}{16 D_l} \cdot \qquad (6.2.5)$$

Relația (6.2.5) este o aproximare în care se consideră că regiunea de impact se solidifică imediat după ce încetează acțiunea pulsului laser.

Numeric, din (6.2.5) avem

$$T_{p\,max} = \frac{(3 \cdot 10^{-4})^2}{16 \cdot 75 \cdot 10^{-7}} \approx 660 \ \mu s. \qquad (6.2.6)$$

Durata minimă a pulsului, T_{min}, este legată de fluxul maxim de căldură admisibil în material prin relația:

$$T_{p\,min} = \frac{d \cdot \rho \cdot H}{\Phi_{max}} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{10}}{16 \cdot 10^{9}} \approx 190 \ \mu s. \qquad (6.2.7)$$

3°. Divergența pulsului laser poate fi calculată prin relația aproximativă

$$\theta = \frac{1{,}22\,\lambda}{R} \qquad (6.2.8)$$

care dă divergența minimă a pulsului laser. Divergența θ este legată de mărimea petei focale S prin relația $S = f \cdot \theta$, unde f este distanța focală a lentilei. Deci $f = \frac{dR}{1{,}22\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1{,}22 \cdot 0{,}69 \cdot 10^{-3}} \approx \frac{3}{4}$ m.

6.3. Mediul poate fi considerat semiinfinit pe direcţia de propagare Ox. Temperatura T la un moment dat şi într-un anumit punct satisface ecuaţia de transmisie a căldurii

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{6.3.1}$$

unde $a^2 = \frac{\sigma_t}{c\rho}$, σ_t fiind conductivitatea termică a mediului, c căldura specifică, iar ρ densitatea.

Condiţia iniţială este

$$T_{(x,0)} = f(x)$$
$$\text{cu } f(x) = \begin{cases} f_\varepsilon(x), & x \in (0, \varepsilon) \\ 0, & x > \varepsilon. \end{cases} \tag{6.3.2}$$

Căldura totală produsă în unitatea de timp în unitatea de volum va fi

$$Q = c\,\rho \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{6.3.3}$$

Pentru rezolvarea ecuaţiei (6.3.1) folosim metoda transformării Fourier. Luînd transformata prin cosinus

$$T(x,\ t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widetilde{T}(\xi, t) \cos(\xi x)\,\mathrm{d}x \tag{6.3.4}$$

Introducînd ecuaţia (6.3.4) în (6.3.1)

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial \widetilde{T}(\xi,\ t)}{\partial t} \cos\ (\xi x)\ \mathrm{d}\xi = -\ \xi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widetilde{T}(\xi, t) \cos(\xi x)\,\mathrm{d}\xi, \tag{6.3.5}$$

sau

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial \widetilde{T}(\xi, t)}{\partial t} + \xi^2 \widetilde{T}(\xi, t) \right] \cos(\xi x)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{6.3.6}$$

Ecuaţia (6.3.6) este echivalentă cu

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} + \xi^2 \widetilde{T} = 0 \tag{6.3.7}$$

iar ecuaţia (6.3.7) poate fi considerată ca o ecuaţie diferenţială de ordinul întîi în raport cu variabila t, ξ putînd fi tratat ca un parametru. Ecuaţia (6.3.7) va avea soluţia

$$\widetilde{T}(\xi, t) = C(\xi) \exp\left[-a^2 \xi^2 t\right] \tag{6.3.8}$$

iar soluţia ecuaţiei iniţiale va fi

$$T(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(\xi) \exp\left[-a^2 \xi^2 t\right] \cos(x\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{6.3.9}$$

Din condiţia iniţială (6.3.2)

$$T(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(\xi) \cos(x\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{6.3.10}$$

Luînd transformata inversă a ecuaţiei (6.3.10)

$$C(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T(\lambda, 0) \cos(\lambda\xi)\, \mathrm{d}\lambda$$

cu care ecuaţia (6.3.10) devine

$$T(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \int_0^\infty \exp\left[-a^2\xi^2 t\right] \cos(x\xi) f(\lambda) \cos(\lambda\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{6.3.11}$$

Scriind

$$\cos(x\xi)\cos(\lambda\xi) = \frac{\cos\xi(x-\lambda) + \cos\xi(x+\lambda)}{2} \tag{6.3.12}$$

ecuaţia (6.3.11) devine

$$T(x, t) = \frac{2}{\pi}\, \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \int_0^\infty f(\lambda) \left(\exp\left[-\frac{(\lambda - x)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(\lambda + x)^2}{4a^2 t}\right]\right) \mathrm{d}\lambda. \tag{6.3.13}$$

Ţinînd seama de faptul că degajarea de căldură se produce numai într-o zonă extrem de mică ($\lambda \in (0, \varepsilon)$),

$$T(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\left(\exp\left[-\frac{(\eta - x)^2}{4a^2t}\right] + \exp\left[-\frac{(\eta + x)^2}{4a^2t}\right]\right)\int_0^\varepsilon f(\lambda)\, d\lambda \tag{6.3.14}$$

unde am aplicat teorema mediei, η fiind o valoare din intervalul $(0, \varepsilon)$.

Cu condiţia (6.3.2) ecuaţia (6.3.14) devine

$$T(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\left(\exp\left[-\frac{(\eta - x)^2}{4a^2t}\right] + \exp\left[-\frac{(\eta + x)^2}{4a^2t}\right]\right)\frac{Q}{\rho c}. \tag{6.3.15}$$

Trecînd la limită pentru $\varepsilon \to 0$ ecuaţia (6.3.15) devine

$$T(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\left(\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right] + \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right]\right)\frac{Q}{\rho c}$$

sau

$$T(x, t) = \frac{2}{a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right]\frac{Q}{\rho c} = \frac{2a}{\sigma_t\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right]Q. \tag{6.3.16}$$

Introducînd fluxul de căldură

$$F = \frac{Q}{t}$$

ecuaţia (6.3.16) se scrie, pentru durata pulsului,

$$T(x, t) = \frac{2aF}{\sigma_t}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right]. \tag{6.3.17}$$

Temperatura suprafeţei se obţine făcînd $x = 0$

$$T(t) = \frac{2aF}{\sigma_t}\sqrt{\frac{t}{\pi}}. \tag{6.3.18}$$

Cu datele din enunţul problemei

$$T_s = \frac{2\cdot 4,85\cdot 10^{-3}}{82\cdot 1,77}\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 10^{11} = 1320°\text{C}.$$

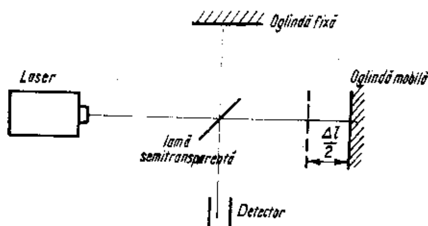


Fig. 6.4 R, a.

După sfîrşitul pulsului temperatura va fi din nou dată de ecuaţia (6.3.16).

6.4. 1°. Montajul experienţei este cel din figura 6.4R, a.

La detector ajung patru unde monocromatice, cu două frecvenţe diferite $(\omega \pm \Delta\omega)$ şi care au parcurs drumuri optice diferite (l sau $l + \Delta l$). Dacă amplitudinile lor sînt egale, rezultanta este

$$x = 2a\,[\cos(t\Delta\omega - l\Delta K) + \exp(-iK\Delta l)\cos(t\Delta\omega - l\Delta K - \Delta l\Delta K)]\cdot$$
$$\cdot\exp[i(\omega t - Kl)] \qquad (6.4.1)$$

a este amplitudinea comună, $K + \Delta K$ şi $K - \Delta K$ sînt vectorii de undă corespunzători frecvenţelor $\omega + \Delta\omega$ şi $\omega - \Delta\omega$, iar $\Delta K = \frac{2\pi\,\Delta\lambda}{\lambda^2}$.

Pentru simplificare, considerăm reală amplitudinea rezultantei

$$\exp[-iK\Delta l] = 1 \text{ sau } \exp[-iK\Delta l] = -1 \qquad (6.4.2)$$

a) $\exp[-iK\Delta l] = 1$, adică $\Delta l = m\lambda$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$x = 4a\cos\frac{m\lambda}{\Lambda}\pi\left\{\cos\left(t\Delta\omega - l\Delta K - \frac{m\lambda}{\Lambda}\pi\right)\exp[i(\omega t - Kl)]\right\} \quad (6.4.3)$$

$$\Lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \gg \lambda \qquad (6.4.4)$$

Λ este lungimea de undă a bătăilor.

Discuție : $\Delta l = 0,\ x = 4a$

$$\Delta l = \frac{\Lambda}{2},\ \ x = 0$$

$$\Delta l = \Lambda,\ x = 4a.$$

Amplitudinea maximă variază cu deplasarea Δl.

b) $\exp\ [-iK\Delta l] = -1$, adică $\Delta l = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,\ m = 0, 1, 2, \ldots$

$$x = -4a \sin\frac{\Delta K \Delta l}{2} \sin\left(t\Delta\omega - l\Delta K - \frac{\Delta K \Delta l}{2}\right)\exp\ [i(\omega t - Kl)] \quad (6.4.5)$$

$$|x| = 4a\ \sin\frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\pi}{\Lambda}. \quad (6.4.6)$$

Discuție : $\Delta l = \frac{\lambda}{2},\ \ |x| = 4a \sin\frac{\lambda}{\Lambda}\frac{\pi}{2} \approx 0$

$$\Delta l = \frac{\Lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{2},\ \ |x| = 4a\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\lambda}{\Lambda}\frac{\pi}{2}\right) \approx 4a.$$

Aproximațiile rezultă din (6.4.4).

La deplasarea oglinzii mobile de la zero la $\frac{\Lambda}{2}$, amplitudinea bătăilor trece prin maxime — pentru $\Delta l = m\lambda$ — și minime, pentru $\Delta l = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$. Maximele scad pînă la zero, pentru $\Delta l = \frac{\Lambda}{2}$, iar minimele cresc pînă la 4a, pentru $\Delta l = \frac{\Lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}$. Există valori ale deplasării pentru care maximele și minimele sînt sensibil egale

$$\Delta l = \frac{\Lambda}{4}. \quad (6.4.7)$$

Intensitatea detectată cu un detector lent va fi o medie în timp:

$$[\overline{I(t)}] = [\overline{x \cdot \tilde{x}}] = 4a^2\left(1 + \cos\ 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} \cos 2\pi \frac{\Delta l}{\Lambda}\right) \qquad (6.4.8)$$

În figura 6.4R, b este reprezentată dependența lui $[\overline{I(t)}]$ de deplasarea Δl.

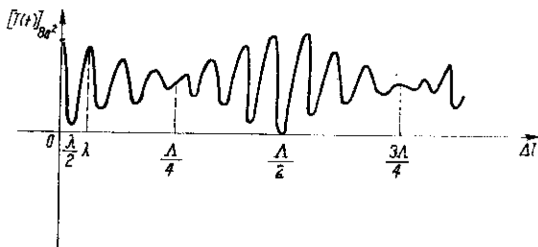


Fig. 6.4 R.b.

Dacă $\Delta l = \lambda$, se vor observa variații mari ale intensității detectate, între $8a^2$ și 0, numai dacă variațiile Δl se efectuează în jurul unei valori egale cu $m\,\frac{\Lambda}{2}$. Dacă variația cu λ se face în jurul unei valori egale cu $(2m + 1)\,\frac{\Lambda}{4}$, nu se va observa nici o variație a intensității detectate. Se pot măsura deci, atît λ cît și Λ, cu același montaj.

2°. Legătura între vitezele de fază v și de grup V și cele două mărimi determinabile experimental, λ și Λ, este

$$v = \frac{\lambda\omega}{2\pi} \qquad (6.4.9)$$

$$V = \frac{\Lambda\Delta\omega}{2\pi} \qquad (6.4.10)$$

ω și $\Delta\omega$ sînt cunoscute din proprietățile laserului, obținîndu-se deci vitezele de grup și de fază ale luminii.

6.5. 1°. Vom calcula deplasarea franjelor Δx cu variația lungimii de undă $\Delta\lambda$.

a) Se exprimă în primul rînd unghiul φ în funcție de λ și frecvența spațială a franjelor ν_f. La interferența celor două fascicule distribuția pe ecran a intensității va fi sinusoidală, cu o frecvență spațială dată de $\nu_f = \frac{\omega_f}{2\pi}$ (fig. 6.5R, a). În acest fel, placa developată poate fi asimilată cu o rețea de difracție, unde maximele și minimele în transmisie se succed. Din studiul dispozitivului Young se știe că primul maxim de interferență se poziționează cu ajutorul relației $\sin\theta = \frac{\delta}{l}$, pentru $\delta = \lambda$. În cazul nostru $l = T_{fs} = \frac{2\pi}{\omega_{fs}}$, indicele s referindu-se la perioada sau frecvența spațială a franjelor. Rezultă

$$\sin\theta = \frac{\lambda\omega_{fs}}{2\pi} = \lambda\nu_{fs}. \qquad (6.5.1)$$

b) Pentru cele două unde (1) și (2), care sosesc pe placă, calculăm diferența de fază determinată de unghiul φ de incidență, în funcție de x (fig. 6.5R, b) prin intermediul constantei de proporționalitate α

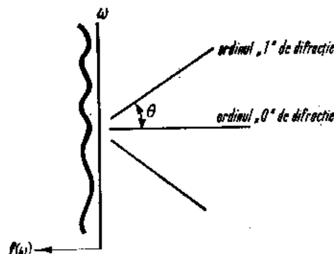
$$\delta_1(x) = \bar{k}\bar{r} = \alpha x$$

$$\alpha = \frac{\bar{k}\bar{r}}{x} = k\sin\frac{\varphi}{2} \approx k\frac{\varphi}{2}$$

$$\delta_1(x) = kx\frac{\varphi}{2}, \text{ unde } k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (6.5.2)$$

Pentru unda (2) asemănătoare se găsește

$$\delta_2(x) = -kx\frac{\varphi}{2}. \qquad (6.5.3)$$



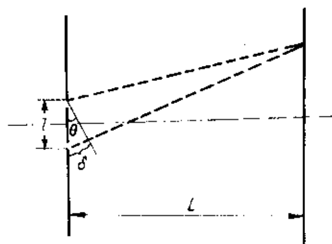


Fig. 6.5 R.a

iferenţa totală de fază între cele două unde, ţinînd seama şi de diferenţa între cele două drumuri optice D, va fi

$$\delta(x) = k(D + x\varphi). \qquad (6.5.4)$$

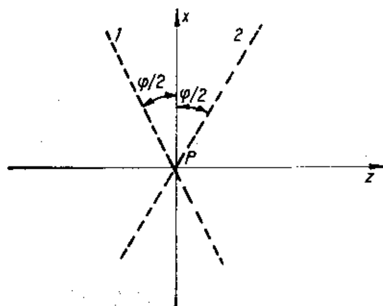


Fig. 6.5. R.b.

Maxime de interferenţă se produc pentru

$$D + x\varphi = m\lambda \qquad (6.5.5)$$

unde m dă ordinele de interferenţă.

Ordinul de interferenţă m se poate calcula aproximativ cu relaţia:

$$m = \frac{D}{\lambda}\cdot \qquad (6.5.6)$$

Diferenţiind (6.5.5) se obţine

$$\varphi\, \mathrm{d}x = m\, \mathrm{d}\lambda. \qquad (6.5.7)$$

Trecînd la diferenţe finite rezultă schimbarea în poziţie a franjelor Δx, pentru o schimbare în lungimea de undă $\Delta\lambda$

$$\Delta x = m\ \frac{\Delta\lambda}{\varphi} \qquad (6.5.8)$$

$$\Delta x = \Delta\lambda \frac{D}{\lambda\varphi}\cdot \qquad (6.5.9)$$

Din (6.5.9) şi (6.5.1) rezultă

$$\Delta x = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\,\frac{D}{\nu_f} = \frac{\Delta\lambda D}{\lambda^2}\,\Delta x_f, \qquad (6.5.10)$$

unde am notat $\Delta x_f = \frac{1}{\nu_f}$ distanţa dintre franje.

2°. Folosim relația (6.5.5) în care acum λ este constant și D variabil

$$D + x\varphi = m\lambda$$
$$\Delta x = \frac{\Delta D}{\varphi}. \tag{6.5.11}$$

Cu $\varphi = \lambda\nu_f = \frac{\lambda}{\Delta x_f}$, rezultă

$$\Delta x = \Delta D \frac{\Delta x_f}{\lambda}. \tag{6.5.12}$$

3°. Deoarece distribuția spectrală este simetrică față de linia centrală

$$S(D) = 2\int j(x) \sin (xD)\, \mathrm{d}x = 0$$

expresia gradului de modulație devine

$$M = \frac{\sqrt{s^2 + c^2}}{P} = \frac{|C(D)|}{P}. \tag{6.5.13}$$

Vom calcula gradul de modulație pentru un laser multimodal (cu 1, 2, 3, 4, 5 moduri).

a) Laserul monomodal

$$j_1(x) = \delta(x) \tag{6.5.14}$$

$$M_1(D) = 1. \tag{6.5.15}$$

b) Laserul cu două moduri

$$j_2(x) = \delta\left(x - \frac{\Delta K}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{\Delta K}{2}\right) \tag{6.5.16}$$

$$M_2(D) = \frac{\left|2\cos\left(\frac{\Delta K}{2} D\right)\right|}{2} = \left|\cos\left(\frac{\pi D}{2d}\right)\right|. \tag{6.5.17}$$

c) Laserul cu trei moduri

$$j_3(x) = \delta(x - \Delta K) + \delta(x) + \delta(x + \Delta K) \tag{6.5.18}$$

$$M_3(D) = \frac{|2\cos(\Delta K D) + 1|}{3} = \frac{\left|2\cos\frac{\pi D}{d} + 1\right|}{3} \tag{6.5.19}$$

d) Laserul cu patru moduri

$$j_4(x) = \delta\left(x - \frac{3\Delta K}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{\Delta K}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{\Delta K}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{3\Delta K}{2}\right) \tag{6.5.20}$$

$$M_4(D) = \frac{\left|2\cos\left(\frac{3\Delta K}{2}D\right) + 2\cos\left(\frac{\Delta K}{2}D\right)\right|}{4} = \frac{\left|\cos\left(\frac{3\pi D}{2d}\right) + \cos\left(\frac{\pi D}{2d}\right)\right|}{2} \tag{6.5.21}$$

e) $j_5(x) = \delta(x - 2\Delta K) + \delta(x - \Delta K) + \delta(x) + \delta(x + \Delta K) + \delta(x + 2\Delta K)$ (6.5.22)

$$M_5(D) = \frac{|2\cos(2\Delta K D) + 2\cos(\Delta K D) + 1|}{5} = \frac{\left|2\cos\left(\frac{2\pi D}{d}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi D}{d}\right) + 1\right|}{5}. \tag{6.5.23}$$

Aplicaţie : din relaţia $2d = m\lambda$, care defineşte modurile axiale rezultă pentru $d' = d + \frac{\lambda}{2}$, o schimbare a lui λ cu cantitatea $\Delta\lambda = \Delta\lambda_{q,q+1}$, care reprezintă distanţa dintre două moduri axiale, astfel că din (6.5.16) se obţine

$$\Delta x = \frac{\Delta\lambda_{q,q+1}}{\lambda^2} D\Delta x_f. \tag{6.5.24}$$

Folosind relația

$$\Delta\lambda_{q,q+1} = \frac{\lambda^2}{2d} \tag{6.5.25}$$

expresia (6.5.24) a lui Δx se mai scrie

$$\Delta x = \frac{D}{2d}\Delta x_f = \frac{\Delta x_f}{2}. \tag{6.5.26}$$

Deoarece Δx_f este distanța spațială dintre două maxime de intensitate, din relația (6.5.26) rezultă o demodulare completă a franjelor, Δx fiind deplasarea acestora.

2°. Din relația (6.5.12), pentru $\Delta D = \frac{\lambda}{2}$, rezultă

$$\Delta x = \frac{\Delta x_f}{2},$$

deci de asemenea demodularea completă a franjelor.

3°. Pentru $D = 0$,

$M_3(0) = 1$, pentru trei și patru moduri de oscilație.

Pentru $D = d$

$$M_3(d) = \frac{1}{3},\ M_4(d) = 0.$$

Se poate generaliza sub forma următoare:

$M_n(d) = \frac{1}{n}$ pentru n impar

$M(d) = 0$ pentru n par.

6.6. Fie τ_0 timpul necesar propagării luminii pe conturul închis $M_1\ M_2\ M_3$ în absența rotației giroscopului laser (fig. 6.6.R). Dacă giroscopul este antrenat într-o mișcare de rotație cu viteza unghiulară Ω atunci unda luminoasă, care se propagă în același sens cu sensul de rotație al giroscopului, execută un drum închis în timpul

$$\tau_d = \tau_0 + \frac{2S\Omega}{c^2} \tag{6.6.1}$$

iar unda luminoasă care se propagă în sens invers sensului de rotație al giroscopului execută un drum închis în timpul

$$\tau_s = \tau_0 - \frac{2S\Omega}{c^2} \qquad (6.6.2)$$

Fig. 6.6. R.

unde c — viteza luminii și S — aria giroscopului egală cu $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Unda care se propagă în același sens cu sensul de rotație al giroscopului o numim unda „dreaptă" iar cea care se propagă în sens invers o numim unda „stîngă".

Deoarece viteza de propagare a luminii este aceeași pentru ambele unde, rezultă că prin rotația conturului giroscopului cele două unde străbat drumuri optice diferite, egale corespunzător cu

$$L_d = c\tau_d = c\tau_0 + c\,\frac{2S\Omega}{2c^2} = p + \frac{2S\Omega}{c} \qquad (6.6.3)$$

$$L_s = c\tau_s = c\tau_0 - c\,\frac{2S\Omega}{c^2} = p - \frac{2S\Omega}{c} \qquad (6.6.4)$$

unde p este perimetrul conturului giroscopului, egal cu $3a$. Din fig. 6.6R se poate înțelege ușor dece drumul parcurs de unda stîngă este mai mic decît $L_0 = 3a = p$. În timpul în care unda se propagă de la A spre B oglinda M_2 se mișcă din poziția B în C și ca urmare, unda va parcurge între cele două oglinzi M_1, M_2 distanța AC, care este evident mai mică ca AB, ceea ce înseamnă că și $L_s < L_0$. Analog se poate arăta că $L_d > L_0$.

Frecvența de oscilație a unui mod longitudinal este dată de relația

$$\omega = q\,\frac{c}{2L} \qquad (6.6.5)$$

unde L este lungimea cavității rezonante respective.

În cazul undei drepte și undei stîngi frecvențele modurilor de oscilație vor fi

$$\omega_d = q \frac{c}{2L_d} \tag{6.6.6}$$

$$\omega_s = q \frac{c}{2L_s}. \tag{6.6.7}$$

Frecvența bătăilor între modurile cu frecvențele date de (6.6.6) și (6.6.7) este

$$\Delta\omega_B = \omega_s - \omega_d = \frac{cq}{2}\left(\frac{L_d - L_s}{L_d L_s}\right). \tag{6.6.8}$$

Pe baza relațiilor (6.6.3) și (6.6.4) relația (6.6.8) devine

$$\Delta\omega_B = \frac{cq}{2} \frac{\frac{4S}{c}\Omega}{p^2 - \frac{4S^2\Omega^2}{c^2}}. \tag{6.6.9}$$

Deoarece se poate presupune că $p^2 \gg \frac{4S^2}{c^2}\Omega^2$ expresia (6.6.9) devine

$$\Delta\omega_B = \frac{cq}{2p}\frac{4S\Omega}{cp} = \frac{cq}{2L_0}\frac{4S\Omega}{cp} = \omega_0 \frac{4S\Omega}{cp} \tag{6.6.10}$$

unde ω_0 este frecvența razei laser generate în absența rotației giroscopului laser.

În final, relația (6.6.10) se scrie

$$\Delta\omega_B = \frac{4S}{\lambda p}\Omega. \tag{6.6.11}$$

Numeric, cu datele problemei, din relația (6.6.11) obținem

$$\Omega = \frac{16 \cdot 10^6 \cdot 0,63 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5}{4 \cdot \frac{0,5^2\sqrt{3}}{4}} \approx 35 \text{ rad/s}. \tag{6.6.12}$$

6.7. 1°. Înlocuim fasciculul focalizat printr-un fascicul colimat cu diametrul $2r_0$, egal cu diametrul spotului focal (fig. 6.7R). Facem o analogie între acest fascicul şi un piston a cărui faţă anterioară F reprezintă frontul de explozie, care are o extindere laterală finită dată de diametrul fasciculului focalizat. Pistonul, deplasîndu-se cu o viteză hipersonică, provoacă o undă de şoc curbă, un şoc în arc.

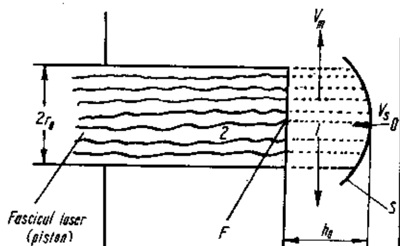


Fig. 6.7R, a

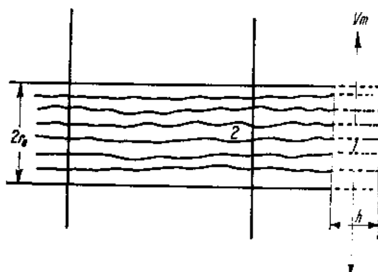


Fig. 6.7R, b

Înseamnă că substanţa se acumulează în şocul în arc datorită presiunii din spatele frontului de şoc S şi curge în afara cilindrului punctat în figura (6.7R,a), după o direcţie radială pentru un observator ce se mişcă împreună cu fasciculul, deoarece nu poate pătrunde prin frontul anterior, impermeabil, al pistonului.

Dacă presupunem o viteză constantă a pistonului, şocul în arc devine staţionar după ce acoperă o lungime de ordinul diametrului pistonului. Înseamnă că distanţa dintre frontul de şoc şi frontul de explozie nu mai creşte ci se mişcă împreună cu aceeaşi viteză. În figura 6.7R, a s-a notat cu (*0*) regiunea solidului neperturbat, cu (*1*) unda de şoc şi cu (*2*) plasma fierbinte.

În continuare, substanţa conţinută în cilindrul punctat din figura 6.7R, a, între S şi F, este accelerată în sens invers de reacţia plasmei ce încă se produce în F. Înălţimea cilindrului scade, deoarece substanţa continuă să curgă în afară după direcţia radială, în timp ce altă substanţă nu mai intră în cilindru prin faţa sa frontală.

Odată cu scăderea înălţimii cilindrului, masa scursă în afară după direcţia radială tinde la zero şi în acelaşi timp masa pierdută prin vaporizare în F, începe să devină importantă pentru „timpul

unde cu ρ_2 şi v_2 s-au notat densitatea şi viteza plasmei produsă în F. Toate mărimile înafara lui h se consideră independente de timp. Punem condiţiile la limită

$$\begin{aligned} h = h_0 = \frac{r_0\rho_0}{\rho_1} &\quad \text{pentru } t = 0 \text{ şi} \\ h = 0 &\quad \text{pentru } t = t_b \end{aligned} \qquad (6.7.4)$$

şi atunci soluţia ecuaţiei (6.7.3) devine

$$t_b = \frac{r_0}{2v_m} \ln\left(\frac{2\rho_0 v_m}{\rho_2 v_2} + 1\right). \qquad (6.7.5)$$

Înlocuim $v_m = \frac{v_s}{2}$ şi

$$t_b = \frac{r_0}{v_s} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_2}\frac{v_m}{v_2} + 1\right), \qquad (6.7.6)$$

Pentru a calcula produsul $\rho_2 v_2$ scriem expresia masei evaporate în funcţie de grosimea ţintei δ, adică $\mu = \pi r_0^2 \rho_0 \delta$ şi în funcţie de semidurata pulsului T_p, adică $\mu = \pi r_0^2 \rho_2 v_2 T_p$ şi din egalitatea celor două expresii

$$\rho_2 v_2 = \frac{\rho_0 \delta}{T_p}. \qquad (6.7.7)$$

Înlocuim în (6.7.6) şi

$$t_b = \frac{r_0}{v_s} \ln\left(\frac{v_s T_p}{\delta} + 1\right). \qquad (6.7.8)$$

În cazul numeric dat

$$t_b = \frac{7\cdot 10^{-5}\text{m}}{2{,}7\cdot 10^4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} \ln\left(\frac{2{,}7\cdot 10^4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 18\cdot 10^{-9}\text{s}}{2\cdot 10^{-5}\text{m}} + 1\right) = 8{,}36\cdot 10^{-9}\,\text{s}.$$

6.8. Dacă

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \qquad (6.8.1)$$

(unde n este densitatea de electroni, e — sarcina electronului, ε_0 — permitivitatea electrică a vidului, m_e — masa electronului) este frecvenţa plasmei, ω — frecvenţa radiaţiei laser şi γ frecvenţa de cioc-

niri, în cazul plasmei create cu un puls gigant laser, se respectă inegalitățile

$$\omega \gg \omega_{r}, \ \omega \gg \gamma. \tag{6.8.2}$$

Atunci indicele de refracție al plasmei creată de pulsul laser, care este complet ionizată, este

$$n_r^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{6.8.3}$$

care se mai poate scrie

$$1 - n_r = 1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx \frac{1}{2}\,\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{e^2 n}{2\varepsilon_0 m_e \omega^2}. \tag{6.8.4}$$

Deplasarea frajelor $\varepsilon(x, y)$ dată de un mediu de grosime l, în punctul (x, y) al cîmpului de interferență observat, măsurată în interfranje este

$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\lambda_0}\int_l [1 - n_r(x, y, z)]\,\mathrm{d}z = \frac{e^2\lambda_0}{8\pi^2 c^2 m_e \varepsilon_0}\int_l n(x, y, z)\,\mathrm{d}z. \tag{6.8.5}$$

Integrarea se face de-a lungul fasciculului (direcția Oz), care traversează cîmpul de interferență în punctul (x, y).

Numărul total N_e de electroni liberi din plasmă se găsește integrînd pe toată suprafața acoperită de plasmă

$$N_e = \int_A \left[\int_l n\,dz\right] \mathrm{d}A = \frac{8\pi^2 c^2 m_e \varepsilon_0}{e^2 \lambda_0}\int_A \varepsilon(x, y)\,\mathrm{d}A.$$

În cazul numeric cerut

$$N_e = \frac{8(3{,}14)^2(3\cdot 10^8)^2\cdot 9{,}108\cdot 10^{-31}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2\cdot 6943\cdot 10^{-10}}\cdot 12{,}55\cdot 10^{-6} =$$

$$= 4{,}1\cdot 10^{16} \text{ electroni.}$$

6.9. Rezolvarea se poate face în diferite feluri după modelul utilizat pentru descrierea evoluției plasmei. Vom considera un model

care ține seama de gradientul de presiune existent în plasmă. Acesta duce la expansiunea plasmei și va fi de forma

$$p = p_s\left(1 - \frac{x}{X}\right), \qquad x \leqslant X \tag{6.9.1}$$

unde p este presiunea în punctul aflat la distanța x de suprafață, p_s presiunea pe suprafața metalului, iar X dimensiunea plasmei în momentul considerat.

Conservarea energiei, în acest caz, arată că rata absorbției de energie $\mathscr{P}$ de către plasmă trebuie să egaleze suma dintre lucrul mecanic efectuat de plasmă în unitatea de timp în procesul de expansiune și energia termică înmagazinată de aceasta în același timp. Pentru calcularea lucrului mecanic ținem cont că

$$\mathrm{d}L = -F\mathrm{d}x, \quad L = -\int_0^X F\,\mathrm{d}x = -A\int_0^X p\,\mathrm{d}x$$

unde am notat cu A aria plasmei, considerată constantă.

Rata efectuării lucrului mecanic va fi

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -A\int_0^X \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}x = -A\int_0^X \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x. \tag{6.9.2}$$

Variația energiei interne a plasmei va fi dată de

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}(n_i + n_e)\ kT\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}(n_i + n_e)kT\ A\ \mathrm{d}x \tag{6.9.3}$$

unde n_i, n_e sînt densitățile de ioni, respectiv, electroni în plasmă.

Integrînd ecuația (6.9.3) și derivînd apoi în raport cu timpul obținem rata de variație a energiei interne

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}A\frac{d}{dt}\int_0^X (n_i + n_e)\ kT\,\mathrm{d}x. \tag{6.9.4}$$

Ecuaţia pentru conservarea energiei devine

$$-A\int_0^X \frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}\,dx + \frac{1}{2}A\frac{d}{dt}\int_0^X (n_i + n_e)kT\ \ dx = \mathscr{P}. \qquad (6.9.5)$$

Din ecuaţia de stare a plasmei

$$p = (n_i + n_e)\ kT \qquad (6.9.6)$$

obţinem

$$n_i = n_{is}\left(1 - \frac{x}{X}\right) \text{ şi } n_e = n_{es}\left(1 - \frac{x}{X}\right) \qquad (6.9.7)$$

unde n_{is} şi n_{es} sînt densităţile de ioni, respectiv, electroni în vecinătatea suprafeţei.

Considerînd că expansiunea plasmei se face astfel încît forma ecuaţiei densităţii (6.9.7) nu se schimbă în timp (expansiune prin similitudine), atunci viteza de expansiune trebuie să crească proporţional cu depărtarea de la suprafaţă

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{X}\,\frac{dX}{dt} \qquad (6.9.8)$$

Înlocuind ecuaţia (6.9.8) în ecuaţia (6.9.5) obţinem:

$$A\int_0^X \frac{p_s x}{X^2}\,\frac{dX}{dt}\,dx + \frac{1}{2}A\,\frac{d}{dt}\int_0^X (n_{is} + n_{es})\left(1 - \frac{x}{X}\right)kT dx = \mathscr{P}$$

sau, efectuînd integralele

$$A\,\frac{p_s}{2}\,\frac{dX}{dt} + \frac{1}{2}A\,\frac{d}{dt}\left[(n_{is} + n_{es})\,kT\,\frac{X}{2}\right] = \mathscr{P}. \qquad (6.9.9)$$

Numărul total de ioni în plasmă poate fi calculat conform ecuaţiei

$$\mathscr{N}_i = A\int_0^X n_{is}\left(1 - \frac{x}{X}\right)dx = A\ n_{is}\,\frac{X}{2} \qquad (6.9.10)$$

şi analog numărul total de electroni va fi

$$\mathcal{N}_e = A n_{es} \frac{X}{2}. \tag{6.9.11}$$

Cu ecuaţiile (6.9.10) şi (6.9.11), ecuaţia (6.9.9) devine

$$\frac{A p_s}{2} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} k(\mathcal{N}_i + \mathcal{N}_e) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}. \tag{6.9.12}$$

Mai putem obţine o ecuaţie pentru cele două variabile X, T ţinînd seama că rata la care plasma efectuează lucru mecanic trebuie să egaleze creşterea energiei ei cinetice în unitatea de timp, adică

$$-A \int_0^X \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^X (n_i m_i + n_e m_e) \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{6.9.13}$$

care, după integrare, devine

$$A \frac{p_s}{2} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{12} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[(\mathcal{N}_i m_i + \mathcal{N}_e m_e) \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right]. \tag{6.9.14}$$

Ecuaţia (6.9.14) se mai scrie, ţinînd seama de ecuaţiile (6.9.6), (6.9.10) şi (6.9.11), sub forma

$$\frac{\mathcal{N}_i + \mathcal{N}_e}{X} kT = \frac{1}{6} (\mathcal{N}_i m_i + \mathcal{N}_e m_e) \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}. \tag{6.9.15}$$

Din ecuaţia (6.9.15) rezultă

$$T = \frac{(\mathcal{N}_i m_i + \mathcal{N}_e m_e) X}{6k(\mathcal{N}_i + \mathcal{N}_e)} \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}. \tag{6.9.16}$$

Scriind ecuaţia (6.9.9) sub forma

$$\frac{\mathcal{N}_i + \mathcal{N}_e}{X} kT \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} (\mathcal{N}_i + \mathcal{N}_e) k \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} \tag{6.9.17}$$

şi înlocuind T din ecuaţia (6.9.16) obţinem

$$\frac{1}{12}(\mathcal{N}_i m_i + \mathcal{N}_e m_e)\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k(\mathcal{N}_i + \mathcal{N}_e)\frac{dT}{dt} = \mathscr{P}. \quad (6.9.18)$$

Derivînd ecuaţia (6.9.16) în raport cu timpul şi înlocuind în (6.9.17) obţinem

$$\frac{1}{12}(\mathcal{N}_i m_i + \mathcal{N}_e m_e)\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + X\frac{d^2X}{dt^2}\right] = \mathscr{P}$$

sau

$$\frac{d^3X^2}{dt^3} = \frac{24\mathscr{P}}{\mathcal{N}_i m_i + \mathcal{N}_e m_e}. \quad (6.9.19)$$

Ecuaţiile (6.9.16) şi (6.9.19) cu condiţii la limite corespunzătoare vor da, prin integrare numerică, evoluţia temperaturii şi dimensiunile plasmei.

6.10. Ca şi în cazul gazelor sau lichidelor neutre, cele mai importante forţe care guvernează neliniarităţile optico-hidrodinamice sînt forţele ponderomotoare şi cele care produc efectele termice.

Forţa ponderomotoare din unitatea de volum, mediată în timp, dintr-un fluid dielectric, avînd constanta dielectrică $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ este

$$\widetilde{f}_{pond} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\,\nabla(\widetilde{E}^2) + \mu_0(\mu_r - 1)\,\nabla(\widetilde{H}^2) + \frac{\varepsilon_r \cdot \mu_r - 1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\widetilde{E} \times \widetilde{H}} \quad (6.10.1)$$

unde μ_r este permeabilitatea magnetică relativă şi $\widetilde{E}^2$ şi $\widetilde{H}^2$ mediile în timp, respectiv, ale pătratelor intensităţilor cîmpurilor electric şi magnetic.

Deoarece $\mu_r = 1$ pentru cîmpurile optice, al doilea termen dispare, iar ultimul poate fi neglijat pentru timpuri de interacţie mai lungi decît „timpul de aprindere" al cîmpurilor.

Primul termen, care rămîne în expresia forţei ponderomotoare, este forţa electrostrictivă ce acţionează asupra sistemelor neutre, comprimînd dielectricul spre regiunile cu intensităţi mai mari.

Constanta dielectrică a plasmei are expresia

$$\varepsilon_r = 1 - \left[\frac{\omega_p^2}{\omega_L^2 + \nu_c^2}\right]\left(1 + i\frac{\nu_c}{\omega}\right) \quad (6.10.2)$$

unde $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}$ este frecvența plasmei (n_e este densitatea de electroni din plasmă), ω_L — frecvența radiației laser și ν_c — frecvența de ciocnire electron-ion din plasmă.

Partea imaginară a lui ε_r dă atenuarea puternică a radiației laser datorată procesului de „bremsstrahlung" invers din plasmă.

Cîștigul spațial, al diferitelor procese neliniare pe care le vom considera, depinde în primul rînd de partea reală a lui ε_r, care pentru plasma produsă cu laser, unde $\nu_c \ll \omega_L$, se reduce la

$$\varepsilon_r' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_L^2}. \tag{6.10.3}$$

Procesele de depunere termică sau încălzirea absorbantă dată de cîmp fac să apară o presiune, care se poate scrie

$$p_{term} = \frac{\beta}{K_s}(T - T_0) \tag{6.10.4}$$

unde β este coeficientul de dilatație termică, K_s — compresibilitatea și T — temperatura.

În condițiile plasmei produse de laser, care e presupusă total ionizată, deci în care lungimea Debye e mică față de lungimea pe care apar fluctuații induse de densitate ($\sim \lambda_{laser}$), cuplajul cu cîmpul radiației laser se realizează prin electroni, iar proprietățile inerțiale se datoresc ionilor. De asemenea, timpul de termalizare ion-electron e mic față de timpul tranzitoriu asociat cu procesele de difuzie stimulată și de autofocalizare, deci putem considera temperaturile electronilor și ionilor egale ($T_e = T_i = T$). Căldura specifică c_p se datorește atît electronilor cît și ionilor, conductivitatea termică σ_t se datorește electronilor, iar vîscozitatea η, ionilor.

În aceste condiții, răspunsul densității de masă a plasmei la cîmpul laserului e guvernat de ecuația Navier-Stokes

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 - \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\right)\rho = \nabla^2(p_{pond} + p_{term}) \tag{6.10.5}$$

presiunea ponderomotoare p_{pond} — e definită conform ecuației (6.10.1) ca

$$p_{pond} = (\varepsilon_r - 1)\ \varepsilon_0\ E^2 \tag{6.10.6}$$

şi presiunea termică e dată de ecuaţia (6.10.4) şi de ecuaţia de difuzie termică

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha c |\overline{E}|^2 + \sigma_t \nabla^2 T}{c_p \rho} \qquad (6.10.7)$$

unde ρ este densitatea de masă, $v_s = \sqrt{\frac{K_s}{\rho}}$ viteza sunetului,

$\eta = 2{,}2 \cdot 10^{-16} \frac{T^{5/2} A}{z^4 \ln \lambda_s}$ kg$\cdot$m$^{-1}\cdot$s^{-1} vîscozitatea ionilor (A — numărul de masă al ionilor, λ_s — lungimea de undă Spitzer),

$$\Gamma = \frac{4 \cdot 10^{-22} z n_e^2 \ln \lambda_s}{3\omega^2 (kT)^{3/2}} \text{ (S.I)}$$

coeficientul de absorbţie datorită bremsstrahlungului invers, $c_p = 3{,}2 \frac{k}{m}$ căldura specifică pe unitatea de masă, k — constanta Boltzmann şi

$$\sigma_t = 1{,}96 \cdot 10^{-9} \frac{T^{5/2}}{2 \ln \lambda_s} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

(c — viteza luminii în vid).

Răspunsul cîmpului radiaţiei laser la plasmă e generat de ecuaţia de undă

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon_s \overline{E}) = 0. \qquad (6.10.8)$$

Atenuarea rezultată din $I_m\ \varepsilon_r$ dă pragurile la care apar difuzia stimulată şi autofocalizarea, cu condiţia ca

$$\text{cîştigul } \alpha = \Gamma \qquad (6.10.9)$$

unde cîştigul se referă la inversul distanţei la care componenta cîmpului scade de e ori.

Pentru plasmele obţinute cu laserii de putere mare se respectă condiţia ca durata pulsului laser să fie mai mare decît timpul în care sunetul parcurge o distanţă de grosime egală cu regiunea de interacţie, deoarece în acest caz zona de interacţie a fasciculului cu plasma (de grosime $\sim \alpha^{-1}$) se deplasează rapid spre fasciculul laser.

Aceasta ne permite să considerăm o situaţie staţionară şi să definim un cîştig spaţial şi nu temporal.

Considerăm efectele neliniare ce apar din forţele ponderomotoare şi din efectele termice, separat.

$$\text{Dacă } \rho = \rho_0 + \rho_1, \text{ cu } \rho_1 \ll \rho_0 \tag{6.10.10}$$

putem scrie constanta dielectrică sub forma

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega p^2}{\omega_l^2}\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \tag{6.10.11}$$

Pentru cazul cuplajului forţei ponderomotoare liniarizăm ecuaţiile (6.10.5) şi (6.10.7) în raport cu ρ_1 şi $\bar{e}_1$, unde

$$\bar{E} = \text{Re}\,\{\bar{E}_0 \exp\,[i(k_L z - \omega_L t)]\} + \bar{e}_1 \tag{6.10.12}$$

şi unde $|\bar{e}_1| \ll |\bar{E}_2|$.

În cazul luminii difuzate înapoi

$$\rho_1 = \text{Re}\,\{\rho_2 \exp\,[i(qx - \omega t) + gz]\} \tag{6.10.13}$$

$$\bar{e}_1 = \text{Re}\,\{\bar{e}_q \exp\,[i(q_s x + \omega_s t) - gz]\} \tag{6.10.14}$$

şi formula de dispersie rezultantă dă o emisie de frecvenţă

$$\omega = \omega_s - \omega_L = -\omega_B = -2\omega_L \frac{v_s}{c}. \tag{6.10.15}$$

Cîştigul maxim devine

$$\alpha = \frac{q_s \cdot q \cdot \varepsilon_0}{\rho_0 v_s}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega_L}\right)^2 \frac{|\bar{E}|^2}{\gamma_B} \tag{6.10.16}$$

unde $\gamma_B = \dfrac{q^2\eta}{\rho_0}$ este semilărgimea spectrală corespunzătoare liniei difuzate spontan. Ecuaţia (6.10.16) este chiar expresia cîştigului maxim pentru difuzia stimulată Brillouin în cazul unui gaz neutru cu factorul $(n_r^2 - 1)$ înlocuit prin $\dfrac{\omega_{p^2}}{\omega_{L^2}}$ (n_r — indicele de refracţie).

Dacă egalăm cu zero derivata întîia în raport cu timpul în ecuaţia (6.10.5) se vede că forţa ponderomotoare dă o intensitate dependentă de indicele de refracţie ($n_r^2 = \varepsilon_r$) sub forma $\frac{\partial n_r}{\partial |\bar{E}|^2} > 0$, care indică autofocalizarea fasciculului laser.

Pentru a calcula distanţa la care componenta linearizată a cîmpului $\bar{e}_1$ scade de e ori, într-un filament de focalizare $\sim q^{-1}$, considerăm doar combinaţiile $\bar{E} \cdot \bar{E}^*$ ale cîmpurilor care dau un răspuns $\omega = 0$ pentru densitatea ρ_0.

Cu constanta dielectrică scrisă sub forma

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_L^2} + \varepsilon_1 |\bar{E}|^2 \tag{6.10.17}$$

formula de dispersie dă un cîştig maxim

$$\alpha_1 = k_L \frac{\varepsilon_1 |\bar{E}|^2}{2} \tag{6.10.18}$$

pentru filamente avînd dimensiunea transversală reciprocă

$$q = \sqrt{|\bar{E}|^2 k_L^2 \varepsilon_1} \tag{6.10.19}$$

unde k_L este numărul de undă laser şi

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_L^2}\right)^2 \frac{\varepsilon_0}{\rho_0 v_s^2}. \tag{6.10.20}$$

Cîştigul maxim devine

$$\alpha_2 = \frac{k_L}{2} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_L^2}\right)^2 \frac{\varepsilon_0 |\bar{E}|^2}{\rho_0 v_s^2}. \tag{6.10.21}$$

Se vede că

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\omega_B \eta}{\rho_0 v_s^2} \sim \frac{l_{ciocnire}}{\lambda_L} \tag{6.10.22}$$

unde $l_{ciocnire}$ este drumul liber mijlociu.

Considerăm acum efectele nelineare datorate efectelor termice. În plasma cu un indice de refracţie datorat în totalitate electronilor li-

beri apare un proces analog cu difuzia stimulată Rayleigh din gazele neutre, care poartă numele de difuzie termică stimulată Thomson.

La fel ca şi în cazul difuziei termice stimulate Rayleigh scriem

$$T = T_0 + T_1, \ T_1 \ll T_0 \tag{6.10.23}$$

cu

$$T_1 = T_q \exp \ [i(qx - \omega t + gz)]. \tag{6.10.24}$$

Din nou anulăm derivata în raport cu timpul şi liniarizăm ecuaţiile (6.10.5), (6.10.7) şi (6.10.8) în raport cu T_1, ρ_1 şi $\bar{e}_1$. Dispersia rezultantă dă cîştigul maxim ce apare pentru emisia Stokes a luminii

$$\omega_s = \omega_L - \frac{\gamma_T}{2} \tag{6.10.25}$$

unde

$$\gamma_T = \frac{2Kq^2}{\rho_0 c_p} \tag{6.10.26}$$

este semilărgimea spectrală a difuziei spontane.

Pentru plasmă $\frac{\gamma_T}{\gamma_B} = 20\, z^3 \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$. Cîştigul maxim devine

$$\alpha_3 = \frac{q_s}{8\pi} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_L^2} \cdot \frac{\beta c \Gamma}{\rho_0 c_p} \frac{|\overline{E}|^2}{\gamma_T} \tag{6.10.27}$$

care e chiar expresia cîştigului termic stimulat Rayleigh, unde termenul $(n_r^2 - 1)$ e înlocuit cu $\left(-\frac{\omega_p^2}{\omega_L^2}\right)$. Semnul minus indică cîştigul pozitiv pentru lumina Stokes emisă, în contrast cu difuzia termică stimulată Rayleigh, ca rezultat al răspunsului opus al constantei dielectrice la modificările densităţii în difuzia termică stimulată Thomson.

Se poate defini un coeficient de absorbţie critic Γ_{cr}, pentru care $\alpha_3 = \alpha_1$. Egalînd (6.10.27) cu (6.10.16) se obţine

$$\Gamma_{cr} = \frac{1}{2} \frac{c_p \omega_B}{\beta c v_s^2} \frac{\gamma_T}{\gamma_B} \frac{\omega_p^2}{\omega_L^2} \sim \frac{\omega_B}{c} \frac{\gamma_T}{\gamma_B} \frac{\omega_p^2}{\omega_L^2} \sim \frac{\omega_B}{c} \frac{\sigma_i}{\eta c_p} \frac{\omega_p^2}{\omega_L^2} \tag{6.10.28}$$

care în cazul plasmei devine

$$\Gamma_{cr} \sim 20z^3 \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{\omega_B}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega_L^2}. \tag{6.10.29}$$

Deci, putem scrie că

$$\alpha_3 = \frac{\Gamma}{\Gamma_{cr}} \alpha_1 \tag{6.10.30}$$

Anulînd derivata în raport cu timpul în ecuațiile (6.10.5) și (6.10.7) se vede că efectele termice produc o autofocalizare dată de indicele de refracție al plasmei

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\omega_p}{\omega_L}\right)^2 \frac{\varepsilon_0 \beta c d}{\rho_0 c_p} \frac{1}{\gamma_T} \tag{6.10.31}$$

și cîștigul maxim pentru autofocalizarea termică este

$$\alpha_4 = \frac{K_L}{4} \varepsilon_0 \left(\frac{\omega_p}{\omega_L}\right)^2 \frac{\beta c d}{\rho_0 c_p} \frac{|\overline{E}|^2}{\gamma_T}. \tag{6.10.32}$$

Pînă la un factor 2, $\alpha_3 \approx \alpha_4$.

În cazul plasmei de hidrogen creată cu un laser cu rubin

$$\Gamma \approx 7 \cdot 10^{-25}\ n_e \mathrm{m}^{-1}$$

$$\alpha_1 \approx 2 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{P}_1 n_e^2 \mathrm{m}^{-1}$$

$$\alpha_2 \approx 10^{-9} \mathrm{P}_2\, n_e \mathrm{m}^{-1}$$

$$\alpha_3 \approx \alpha_4 \approx 3 \cdot 10^{-10}\ n_e \Gamma\, P_3\ \mathrm{m}^{-1},$$

unde P este densitatea de putere (puterea pe unitatea de suprafață).

La prag, $\alpha = \Gamma$, de unde

$$P_{1(prag)} = 3 \cdot 10^{16}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$$

$$P_{2(prag)} = 5 \cdot 10^{4}\ n_e \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$$

$$P_{3(prag)} \approx P_{4(prag)} = 3 \cdot 10^{31}\ n_e^{-1} \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}.$$

6.11. Într-un laser cu un rezonator Fabry-Pérot semilărgimea spectrală a radiației e determinată de emisia spontană și de mișcarea termică (browniană) a oglinzilor rezonatorului.

Semilărgimea liniei datorată radiației spontane $\Delta\omega_L$ e dată de relația.

$$\Delta\omega_{sp} = \frac{4\hbar\omega}{P}\left(\frac{\Delta\omega_L\Delta\omega_c}{\Delta\omega_L+\Delta\omega_c}\right)^2 \qquad (6.11.1)$$

unde $\Delta\omega_L$ este semilărgimea liniei spectrale a mediului activ, $\Delta\omega_c$ — semilărgimea liniei rezonatorului, P — puterea radiației laser, ω — frecvența radiației laser.

a) În cazul considerat,

$$\Delta\omega_{sp} = \frac{4\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{-15}}{10^{-3}}\left(\frac{10^6\cdot 10^8}{10^6+10^8}\right)^2 = 1{,}2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$$

iar raportul $\left(\frac{\Delta\omega_{sp}}{\omega}\right)_{sp} = \frac{1{,}2\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{15}} = 4\cdot 10^{-19}$

Semilărgimea liniei spectrale a radiației, legată de fluctuațiile termice ale pozițiilor oglinzilor, se determină din relația

$$\Delta\omega_T = \omega\,\frac{\Delta\omega_L}{\Delta\omega_L+\Delta\omega_c}\,\frac{\delta l}{l} \qquad (6.11.2)$$

unde l este lungimea rezonatorului, δl este variația medie pătratică a lungimii rezonatorului care se poate calcula din relația

$$\frac{\delta l}{l} = \sqrt{\frac{2kT}{EV_a}} \qquad (6.11.3)$$

unde V_a este volumul mediului activ, E modulul lui Young al barei metalice de care sînt legate oglinzile și T temperatura.

În cazul considerat al laserului cu He—Ne

$$\frac{\delta l}{l} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300}{10^{10}\cdot 10^{-3}}} = 2{,}8\cdot 10^{-14}$$

și

$$\Delta\omega_T = 3\cdot 10^{15}\,\frac{10^8}{10^8+10^6}\cdot 2{,}8\cdot 10^{-14} = 84\ \mathrm{s}^{-1}.$$

iar raportul

$$\left(\frac{\Delta\omega_T}{\omega}\right)_{ns} = 2{,}8\cdot 10^{-14}.$$

b) În cazul standardelor optice, cînd se realizează un raport $S = \frac{\Delta\omega_c}{\Delta\omega_L} = 10^3$, rapoartele $\frac{\Delta\omega_{sp}}{\omega}$ şi $\frac{\Delta\omega_T}{\omega}$ devin

$$\left(\frac{\Delta\omega_{sp}}{\omega}\right)_s = \frac{4h}{P}\left(\frac{\Delta\omega_L\cdot\Delta\omega_c}{\Delta\omega_L+\Delta\omega_c}\right)^2 = \frac{4\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}}{10^{-3}}\left(\frac{10^3\cdot 10^6}{10^3+10^6}\right)^2 = 4\cdot 10^{-25}$$

şi

$$\left(\frac{\Delta\omega_T}{\omega}\right)_s = \frac{\Delta\omega_L}{\Delta\omega_L+\Delta\omega_c}\,\frac{\delta l}{l} = \frac{10^3}{10^3+10^3}\,2{,}8\cdot 10^{-14} = 2{,}8\cdot 10^{-17}.$$

6.12. Pierderile radiative mari şi interacţiunea puternică a modurilor conduce la o acoperire totală a frecvenţelor spectrului. Noţiunea de mod îşi pierde înţelesul obişnuit şi spectrul devine continuu. Dacă numărul N al modurilor ce interacţionează e foarte mare, reacţia devine nerezonantă. Dacă oglinda şi sistemul împrăştietor au diametrul D şi sînt aşezate la distanţa l una de alta, atunci numărul de moduri împrăştietoare legate, N, se determină din relaţia

$$N \approx \frac{\Omega_l}{\Omega_{dif}} \tag{6.12.1}$$

unde Ω_l este unghiul solid al radiaţiei laser şi $\Omega_{dif} \approx \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2$ este unghiul solid de difracţie. Densitatea spectrală de moduri ρ_ω şi distanţa medie dintre ele $\delta\omega = \frac{1}{\rho_\omega}$, conform relaţiei Rayleigh-Jeans, sînt egale cu

$$\rho_\omega = N\frac{2l}{c}, \quad \delta\omega = \frac{c}{2l}\,\frac{1}{N}. \tag{6.12.2}$$

Prin împrăştiere, are loc o tranziţie a radiaţiei de la un mod la celelalte $N-1$ moduri, sau în spaţiul liber. Trecerea radiaţiei în modurile rezonatorului nu conduce la o pierdere a energiei pentru sistem ci la o interacţiune a modurilor. Rata de pierdere a radiaţiei din mod, socotind trecerea fotonilor în celelalte $(N-1)$ moduri, se determină din relaţia

$$\Gamma = \frac{c}{2l}\ln\left(\frac{\Omega_l}{\Omega_{dif}}\right) = \frac{c}{2l}\ln N. \tag{6.12.3}$$

Ieșirea radiației în spațiul liber și absorbția ei pe oglindă și pe împrăștietor determină pierderile radiative ale sistemului. Rata de pierdere a radiației în acest fel e dată de

$$\gamma = \frac{c}{2l} \ln \left(\frac{1}{r_i r_0} \cdot \frac{\Omega_{imp}}{\Omega_l} \right) \tag{6.12.4}$$

unde r_i este coeficientul de reflexie al împrăștietorului, r_0 coeficientul de reflexie al oglinzii, Ω_{imp} — unghiul solid de împrăștiere în urmă; apare condiția ca $\Omega_{imp} \gg \Omega_{laser}$.

Reacția este nerezonantă dacă

$$\Gamma, \ \gamma \gg \delta\omega \tag{6.12.5}$$

ceea ce înseamnă că $N \gg 1$.

Calculăm diametrul rezonatorului din ecuația (6.12.2), știind că densitatea spectrală de moduri e dată de relația

$$\rho_\omega = \frac{2\omega^2}{\pi c^3} V.$$

unde ω este frecvența laser și V volumul rezonatorului.

Egalînd cele două expresii

$$N \cdot \frac{2l}{c} = \frac{2\omega^2}{\pi c^3} V, \text{ unde } V = \frac{\pi D^2}{4} l \text{ și } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

avem că

$$N \frac{2l}{c} = \frac{2}{\pi} \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \frac{\pi D^2 l}{4c^3} \text{ și } D = \sqrt{\frac{N\lambda^2}{\pi^2}} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{N}.$$

În cazul considerat:

$$D = \frac{10^{-6}}{3{,}14} \sqrt{10^9} = 10^{-2} \text{ m}.$$

6.13. 1°. În cazul cavității formate din două oglinzi plane paralele, situate la distanța D una de alta, rezonanța unui mod longitudinal

apare atunci cînd timpul de trecere dus-întors al undei în cavitatea vidată este un număr întreg de perioade

$$\frac{2D}{c} = \frac{2\pi q}{\omega} \tag{6.13.1}$$

unde c — viteza luminii în vid, iar q — un număr întreg care reprezintă ordinul modului considerat. Dacă n_r este indicele de refracție al

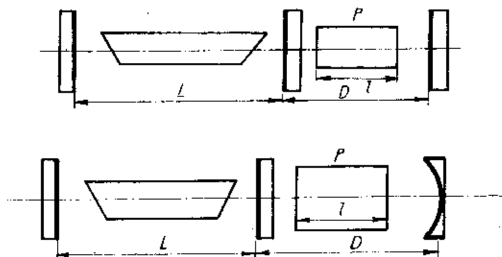


Fig. 6.13 R, a, b

plasmei de lungime l, așezată în cavitatea cuplată de lungime D (fig. 6.13.R,a), condiția de rezonanță a unui mod longitudinal se scrie

$$\frac{2}{c}\,(D - l + n_r l) = \frac{2}{c}\,[D + l\,(n_r - 1)] = \frac{2\pi q'}{\omega} \tag{6.13.2}$$

unde q′ este ordinul unui mod longitudinal rezonant.

Considerînd că $n_r = 1 + \Delta\, n_r$ relația (6.13.2) devine

$$\frac{2}{c}\,(D + l\,\Delta\, n_r) = \frac{2\pi q'}{\omega}, \tag{6.13.3}$$

Din relațiile (6.13.1) și (6.13.3) obținem

$$\Delta n_r = \frac{\Delta q \cdot c}{\omega l} \cdot \pi. \tag{6.13.4}$$

Cea mai mică variație de indice de refracție $(\Delta n_r)_{min}$ care poate fi detectată din modularea fasciculului emis este cea care provoacă trecerea de la modul q la modul $q' = q + 1$, deci

$$(\Delta n_r)_{min} = \frac{\pi c}{\omega l} = \frac{\pi \lambda}{l} . \tag{6.13.5}$$

Indicele de refracție al plasmei este dat de relația

$$n_r = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e e^2}{m_e \omega^2} . \tag{6.13.6}$$

unde ω_p — frecvența de oscilație proprie a plasmei, n_e — densitatea electronică din plasmă, e — sarcina electronului și m_e — masa electronului.

Punînd $n_r = 1 + \Delta n_r$ în relația (6.13.6) obținem.

$$(\Delta n_r)_{min} = - \frac{1}{2} \frac{(n_e)_{min} e^2}{m_e \omega^2} . \tag{6.13.7}$$

Din (6.13.5) și (6.13.7) obținem

$$(n_e)_{min} = \frac{m_e c^2}{e^2} \frac{1}{\lambda l} \approx 1{,}11 \cdot 10^{25} \cdot \frac{1}{D\lambda} \text{ m}^{-3} \tag{6.13.8}$$

2°. Dacă cavitatea cuplată este formată dintr-o oglindă sferică de rază R și o oglindă a laserului (fig. 6.13R, b), frecvențele de rezonanță ale acestei cavități sînt

$$\omega_{mpq} = \frac{\pi c}{D} \left[q + \frac{1}{2\pi} (1 + m + p) \text{ arc cos} \left(1 - \frac{2D}{R} \right) \right] \tag{6.13.9}$$

unde m și p sînt numere întregi care reprezintă ordinele modurilor transversale.

Pentru $m = p = 0$ și $R = \infty$ se regăsesc modurile longitudinale.

Urmînd raţionamentul de la punctul 1 obţinem în acest caz relaţia

$$(n_e)_{min} = 1{,}11 \cdot 10^{25} \cdot \frac{1}{l\lambda}\left[\Delta q + \frac{\Delta m + \Delta p}{\pi} \cos^{-1}\left(1 - \frac{l}{R}\right)^{1/2}\right] \mathrm{m}^{-3} \,. \tag{6.13.10}$$

Dacă $l = R/2$ atunci factorul în $\cos^{-1}$ este $\frac{\pi}{4}$ şi paranteza mare din relaţia (6.13.10) devine

$$\left[\Delta q + \frac{\Delta m + \Delta p}{4}\right]. \tag{6.13.11}$$

Aceasta ne arată că $(n_e)_{min}$ este determinat şi de rezonanţa modurilor transversale. Luînd $\Delta q = 0$, $\Delta m = 1$ şi $\Delta p = 0$ rezultă din (6.13.10) şi (6.13.8) că, în acest caz, a crescut sensibilitatea metodei de 4 ori. Sensibilitatea este determinată în acest caz de rezonanţa modurilor transversale.

6.14. Variaţia intensităţii undelor progresive de-a lungul axei mediului activ e descrisă de ecuaţia

$$-\frac{ic}{2}\frac{dI_{ki}}{dx} = \alpha_k I_{ki} - \beta_k I_{ki}^2 \tag{6.14.1}$$

unde $i = 1{,}2$ pentru cele două unde ce se întîlnesc iar $k = \mathrm{I, II}$ pentru mediile active din cele două tuburi laser, iar α este coeficientul de amplificare şi β coeficientul de saturaţie.

Condiţiile la graniţă pentru cele două unde se scriu sub forma

$$I_{1B} = r_1 I_{1C}, \quad I_{1D} = r_2 I_{1A}, \quad I_{2C} = r_1 I_{2B}, \quad I_{2A} = r_2 I_{2D}. \tag{6.14.2}$$

Deoarece punctele de intrare în tuburile cu mediu activ sînt pentru unda 1, B şi D, iar pentru unda 2, A şi C (fig. 6.14) simetria în propagarea intensităţilor undelor ce se întîlnesc în tuburi e asigurată în două cazuri:

1) dacă $r_1 = r_2$ sau (6.14.3)

2) dacă $\alpha_{\mathrm{I}} = \alpha_{\mathrm{II}}$, $\beta_{\mathrm{I}} = \beta_{\mathrm{II}}$ (6.14.4)

Vom considera cazul dat de relaţiile (6.14.4).

Integrînd ecuaţiile (6.14.1) mersul intensităţii undelor progresive în tubul i se poate scrie sub forma

$$I_i = \frac{\frac{\alpha_k}{\beta_k}\exp\left[-\frac{2\alpha_k}{c}x\right]}{B_{ik} + \exp\left[-\frac{2\alpha_k}{c}x\right]} \tag{6.14.5}$$

unde $k = \mathrm{I, II}$. Constantele B_{ik} $(i = 1,2)$ se determină din condiţiile la limită (6.14.2)

Vom caracteriza nereciprocitatea amplitudinii în tubul k prin integrala din diferenţa intensităţilor undelor în propagare

$$\int_0^{l_k} (I_1 - I_2)_k \, \mathrm{d}x = l\Delta I_k \cdot \tag{6.14.6}$$

Folosim ecuaţiile (6.15.5) şi obţinem

$$\int_0^{l_k} I_i \, \mathrm{d}x = \int_0^{l_k} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \frac{\exp\left[-\frac{2\alpha_k}{c} x\right]}{B_{ik} + \exp\left[-\frac{2\alpha_k}{c} x\right]} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{c}{2\beta_k} \ln \frac{\exp\left[\frac{2\alpha_k}{c} l_k\right] - B_{ik}}{1 + B_{ik}} \tag{6.14.7}$$

Făcînd calculele, suma nereciprocităţilor din cele două tuburi e dată de relaţia

$$\Delta I = \Delta I_{\mathrm{I}} + \Delta I_{\mathrm{II}} = \frac{c(r_1 - r_2)}{2l} \left(\frac{1}{B_{\mathrm{I}}} - \frac{1}{B_{\mathrm{II}}}\right) \times$$

$$\times \frac{r_1^2 \exp\left[\frac{2}{c}(\alpha_{\mathrm{I}} l_{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{II}} l_{\mathrm{II}})\right] - 1}{\left[r_1 \exp\left[\frac{2\alpha_{\mathrm{I}} l_{\mathrm{I}}}{c}\right] + \frac{\alpha_{\mathrm{II}}\beta_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}\beta_{\mathrm{II}}} \frac{\left(\exp\left[\frac{2\alpha_{\mathrm{I}} l_{\mathrm{I}}}{c}\right] - 1\right)}{\left(\exp\left[\frac{2\alpha_{\mathrm{II}} l_{\mathrm{II}}}{c}\right] - 1\right)}\right]} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\left[r_1 \exp\left[\frac{2\alpha_{\mathrm{II}} l_{\mathrm{II}}}{c}\right] + \frac{\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{II}}} \frac{\beta_{\mathrm{II}}}{\beta_{\mathrm{I}}} \frac{\left(\exp\left[\frac{2\alpha_{\mathrm{II}} l_{\mathrm{II}}}{c}\right] - 1\right)}{\left(\exp\left[\frac{2\alpha_{\mathrm{I}} l_{\mathrm{I}}}{c}\right] - 1\right)}\right]} \cdot \tag{6.14.8}$$

În cazul considerat (ecuațiile (6.14.4)) $\beta_I = \beta_{II}$ și $\Delta I = 0$. Considerăm în continuare influența nereciprocității amplitudinii asupra generării frecvenței undelor ce se întîlnesc venind din sensuri opuse.

Integrînd ecuația pentru faze

$$(-1)^p c \frac{d\varphi}{dx} = \sigma_p + \rho_p I_p(x) + \tau_{ps} I_{s \neq p}(x) \qquad (6.14.9)$$

unde $p,s = 1,2$, σ_p — este coeficientul liniar de apropiere a modului de centru (dispersie liniară) iar ρ_p și τ_{ps} dau micșorarea acestei apropieri datorită dispersiei neliniare, și folosind condițiile la graniță

$$\varphi_p(kl + 2\pi) - \varphi_p(kl) = \frac{\omega_p l}{c} - 2\pi p. \qquad (6.14.10)$$

obținem expresia frecvenței undelor progresive generate, ținînd cont de variația dispersiei neliniare de-a lungul axelor tuburilor laser cu mediu activ

$$\omega_p = \omega_c + \sigma_p + \langle \rho_p I_p(x) \rangle + \langle \tau_{ps} I_{s \neq p}(x) \rangle \qquad (6.14.11)$$

unde $\omega_c = \frac{2\pi pc}{l}$ este frecvența rezonatorului.

Expresiile coeficienților ρ și τ, cînd avem două tuburi laser cu mediu activ, sînt date de

$$\langle \rho_p I_p(x) \rangle = \frac{1}{L}\left[\rho_{pI}\int_0^{e_I} I_p(x)\,dx + \rho_{pII}\int_0^{e_{II}} I_p(x)\,dx\right]$$
$$\langle \tau_{ps} I_s(x) \rangle = \frac{1}{L}\left[\tau_{psI}\int_0^{e_I} I_s(x)\,dx + \tau_{psII}\int_0^{e_{II}} I_s(x)\,dx\right] \qquad (6.14.12)$$

Dacă frecvențele rezonatorilor sînt egale $\omega_{c1} = \omega_{c2} = \omega_c$ și $\sigma_1 = \sigma_2$ $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\sigma_{12} = \tau_{21} = \tau$, diferența frecvențelor undelor se determină din nereciprocitatea amplitudinii

$$\omega_1 - \omega_2 = \langle (\rho - \tau)\,[I_1(x) - I_2(x)] \rangle =$$
$$= (\rho - \tau)_I\, \Delta I_I + (\rho - \tau)_{II}\, \Delta I_{II}. \qquad (6.14.13)$$

Într-un mediu cu o formă Doppler a liniei de amplificare, există relația

$$(\rho - \tau)_i = \frac{f_i \beta_i}{1 + f_i^2} \tag{6.14.14}$$

unde $f_i = \frac{\omega_c - \Omega_{0i}}{\gamma_{ab}}$, cu Ω_{0i} centrul liniei de amplificare din tubul i.

Înlocuind în ecuația (6.14.13) expresiile (6.14.14) și (6.14.8) și presupunînd că amplificarea în cele două tuburi laser e aceeași, deci că $\exp\frac{2\alpha_I l_I}{c} = \exp\frac{2\alpha_{II} l_{II}}{c}$ obținem relația

$$\omega_1 - \omega_2 = -\frac{c}{2L}\frac{(f_I - f_{II})(1 - f_I f_{II})}{(1 + f_I^2)(1 + f_{II}^2)} \times$$

$$\times \frac{(r_1 - r_2)\left(r_1^2 \exp\left[\frac{4\alpha_I l_I}{c}\right] - 1\right)}{\left(r_1 \exp\left[\frac{2\alpha_I l_I}{c}\right] + \frac{\alpha_{II}\beta_I}{\alpha_I \beta_{II}}\right)\left(r_1 \exp\left[\frac{2\alpha_I l_I}{c}\right] + \frac{\alpha_I \beta_{II}}{\alpha_{II}\beta_I}\right)} \tag{6.14.15}$$

Pentru că $\alpha_I = \alpha_{II}$ și $\beta_I = \beta_{II}$ conform ecuației (6.14.4),

$$\frac{\alpha_{II}\beta_I}{\alpha_I\beta_{II}} = \frac{\alpha_I\beta_{II}}{\alpha_{II}\beta_I} = 1 \quad \text{și}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = -\frac{c}{2L}\frac{(f_I - f_{II})(1 - f_I f_{II})}{(1 + f_I^2)(1 + f_{II}^2)} \times$$

$$\times \frac{(r_1 - r_2)\left(r_1 \exp\left[\frac{2\alpha_I l_I}{c}\right] - 1\right)}{\left(r \exp\left[\frac{2\alpha_I l_I}{c}\right] + 1\right)} \tag{6.14.16}$$

Înlocuim valorile numerice în ecuația (6.14.16)

$$\omega_1 - \omega_2 = -\frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 3}\frac{(2 - 2,2)(0,9 - 0,889)(0,9 \cdot 1,135 - 1)}{(1 + 2^2)(1 + 2,2^2)(0,9 \cdot 1,135 + 1)} = -1,16 \text{ Hz}$$

deci $|\omega_1 - \omega_2| = 1{,}16$ Hz, ceea ce exprimă faptul că diferența între frecvențele undelor generate în cele două tuburi laser se datorește pierderilor diferite ($r_1 \neq r_2$) și formelor diferite ale liniilor în cele două medii active ($f_I \neq f_{II}$).

6.15. Puterea instantanee a semnalului detectat la intrare în sistemul de detecție este proporțională cu expresia

$$E_L^2\left[\cos\left(\omega_L t + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

unde E_L este amplitudinea semnalului laser și ω_L este frecvența sa, adică scriem

$$\mathscr{P}_L \sim \left[E_L \cos\left(\omega_L t + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2. \qquad (6.15.1)$$

În mod analog, puterea instantanee a semnalului de referință la intrare în sistemul de detecție este proporțională cu expresia

$$\left[E_r \cos\left(\omega_r t - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

unde E_r este amplitudinea semnalului de referință și ω_r este frecvența sa.

Prin urmare

$$\mathscr{P}_r \sim \left[E_r \cos\left(\omega_r t - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2. \qquad (6.15.2)$$

După trecere prin oglindă fasciculele care cad pe fotodetectorii FD_1 și FD_2 au puterile instantanee de forma

$$\mathscr{P}_1 \sim \frac{1}{2}\left[E_L \cos \omega_L t + E_r \cos \omega_r t\right]^2 \qquad (6.15.3)$$

$$\mathscr{P}_2 \sim \frac{1}{2}\left[E_L \sin \omega_L t - E_r \sin \omega_r t\right]^2. \qquad (6.15.4)$$

În relațiile (6.15.3) și (6.15.4) s-a luat în considerare atît deplasarea de fază dată de oglindă cît și atenuarea la oglindă.

Curentul i, dat de un fotodetector asupra căruia cade un fascicul de lumină cu puterea $\mathscr{P}$, poate fi scris sub forma

$$i = \frac{e\eta\mathscr{P}}{\hbar\omega} \qquad (6.15.5)$$

unde η este eficiența cuantică a fotodetectorului, e — sarcina electronului.

Prin urmare, curenții i_1 și i_2 dați de cei doi fotodetectori, în conformitate cu (6.15.3), (6.15.4) și (6.15.5) se scriu

$$i_1 \sim \frac{\eta e}{\hbar\omega} \frac{1}{2} [E_L \cos \omega_L t + E_r \cos \omega_r t]^2 \tag{6.15.6}$$

$$i_2 \sim \frac{\eta e}{\hbar\omega} \frac{1}{2} [E_L \sin \omega_L t - E_r \sin \omega_r t]^2. \tag{6.15.7}$$

Curentul sumă de la cei 2 fotodetectori este

$$i_1 + i_2 \sim \frac{\eta e}{2\hbar\omega} [E_r^2 \cos^2 \omega_r t + E_L^2 \cos^2 \omega_L t + E_r^2 \sin^2 \omega_r t +$$

$$+ E_L^2 \sin^2 \omega_L t + 2E_L E_r \cos \omega_L t \cos \omega_r t - 2E_L E_r \sin \omega_L t \sin \omega_r t] =$$

$$= \frac{\eta e}{2\hbar\omega} [E_r^2 + E_L^2 + 2E_r E_L \cos (\omega_L + \omega_r) t]. \tag{6.15.8}$$

Făcîndu-se filtrarea la frecvența $\omega_L + \omega_r$ obținem

$$i_1 + i_2 \sim \frac{\eta e}{2\hbar\omega} [E_L^2 + E_r^2].$$

Expresia pentru diferența curenților celor doi fotodetectori este

$$i_s = i_1 - i_2 \sim \frac{\eta e}{2\hbar\omega} [E_r^2 \cos^2 \omega_r t + E_L^2 \cos^2 \omega_L t - E_r^2 \sin^2 \omega_r t -$$

$$- E_L^2 \sin^2 \omega_L t + 2E_r E_L \cos \omega_L t \cdot \cos \omega_r t + 2E_r E_L \sin \omega_r t \sin \omega_L t] =$$

$$= \frac{\eta e}{2\hbar\omega} [E_r^2(\cos^2 \omega_r t - \sin^2 \omega_r t) + E_L^2(\cos^2 \omega_L t - \sin^2 \omega_L t) +$$

$$+ 2E_L E_r(\cos \omega_r t \cos \omega_L t + \sin \omega_L t \sin \omega_r t)] =$$

$$= \frac{\eta e}{2\hbar\omega} [E_r \cos^2 2\omega_r t + E_L^2 \cos^2 2\omega_L t + 2E_L E_r \cos (\omega_L - \omega_r) t]. \tag{6.15.9}$$

Dacă se neglijează componentele cu frecvență mai mare decît $\omega_L - \omega_r$, obținem

$$i_s = i_1 - i_2 \sim \frac{\eta e}{\hbar\omega} E_L E_r \cos(\omega_L - \omega_r) t, \qquad (6.15.10)$$

Valoarea pătratică medie a curentului i_s este

$$\overline{i_s^2} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\eta e}{\hbar\omega}\right)^2 E_L^2 E_r^2. \qquad (6.15.11)$$

Curentul sumă $i_1 + i_2$ este o componentă constantă pe seama căreia apare zgomotul intern al sistemului de detecție. Dacă banda de transmisie a sistemului este $\Delta\omega$ atunci valoarea pătratică medie a curentului de zgomot $\overline{i_{zg}^2}$ este

$$\overline{i_{zg}^2} = 2e\,\Delta\omega(i_1 + i_2) \sim \frac{\eta e^2 \Delta\omega}{\hbar\omega}(E_L^2 + E_r^2). \qquad (6.15.12)$$

Din expresiile (6.15.11) și (6.15.12) obținem raportul semnal/zgomot la ieșire din sistemul de detecție sub forma

$$\frac{\mathscr{P}_{s\ ie\c{s}ire}}{\mathscr{P}_{zg\ ie\c{s}ire}} = \frac{\overline{i_s^2}}{\overline{i_{zg}^2}} = \frac{\eta}{2\hbar\omega\,\Delta\omega}\,\frac{E_L^2 E_r^2}{E_L^2 + E_r^2} = \frac{\eta}{2\hbar\omega\,\Delta\omega}\,\frac{E_L^2}{1 + \left(\frac{E_L}{E_r}\right)^2}. \qquad (6.15.13)$$

Din relația (6.15.13) se vede că pentru a mări curentul de semnal este necesar să mărim amplitudinea oscilațiilor care se heterodinează, lucru care se vede și din relația (6.15.11). Dacă alegem amplitudinea semnalului de heterodinare mult mai mare ca amplitudinea semnalului la intrare în detector, adică $E_r \gg E_L$ (relație asigurată în cazul problemei noastre de faptul că $\mathscr{P}_r \gg \mathscr{P}_L$), atunci raportul semnal/zgomot se scrie

$$\frac{\mathscr{P}_{s\ ie\c{s}ire}}{\mathscr{P}_{zg\ ie\c{s}ire}} = \frac{\eta}{\hbar\omega\,\Delta\omega}\,\frac{E_L^2}{2} = \frac{\eta}{\hbar\omega\,\Delta\omega}\,\mathscr{P}_L \qquad (6.15.14)$$

unde $\mathscr{P}_L$ este puterea medie a semnalului laser detectat. Numeric relația (6.15.14) dă

$$\frac{\mathscr{P}_{s\ ie\c{s}ire}}{\mathscr{P}_{zg\ ie\c{s}ire}} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\frac{(3 \cdot 10^8)^2}{(0{,}63 \cdot 10^{-6})^2}\,(10 \cdot 10^{-10})} \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3} \approx 16. \qquad (6.15.15)$$

2°. Pentru un amplificator liniar ideal la frecvențele optice puterea de zgomot este dată de relația

$$\mathscr{P}_{zg}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} + \hbar\omega. \qquad (6.15.16)$$

Primul termen din (6.15.16) reprezintă zgomotul termic iar la doilea termen reprezintă zgomotul aditiv minim, determinat de efectele cuantice și adesea este datorat în întregime emisiei spontane a mediului amplificator. Pentru $\hbar\omega \gg kT$ relație care este satisfăcută în cazul frecvențelor optice atunci zgomotul termic este neglijabil și $P_{zg}(\omega) \to \hbar\omega$. De aceea, dacă amplificatorul ideal are o bandă de transmisie $\Delta\omega$ cu frecvența centrală $\omega \gg kT/\hbar$ și dacă puterea medie a semnalului este P_L atunci raportul semnal/zgomot la ieșire este

$$\frac{\mathscr{P}_{s\ iesire}}{\mathscr{P}_{zg\ iesire}} = \frac{\mathscr{P}_L}{\int\limits_{\omega-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega+\Delta\omega/2} \mathscr{P}_{zg}(\omega)\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathscr{P}_L}{\hbar\omega\Delta\omega} \qquad (6.15.17)$$

Relația (6.15.17) coincide cu relația (6.15.14) cu condiția ca eficiența cuantică a sistemului să fie 1. Deci

$$\left(\frac{\mathscr{P}_{s\ iesire}}{\mathscr{P}_{zg\ iesire}}\right)_{ap.\ ideal} = \frac{1}{\eta}\,\frac{\mathscr{P}_{s\ iesire}}{\mathscr{P}_{zg\ iesire}} \approx \frac{16}{4\cdot 10^{-2}} \approx 400. \qquad (6.15.18)$$

6.16. Fie ω frecvența semnalului injectat. În prezența acestui semnal care se suprapune peste cel laser polarizarea mediului laser este de forma

$$P(t) = P_L \exp[i\omega_L t] + \{(P_1 + P_1^s)\exp[i\,\omega\,t] + c\cdot c.\} \qquad (6.16.1)$$

unde $c.c.$ înseamnă complexa conjugată, P_L este polarizarea indusă de cîmpul radiației laser iar P_1 și P_1^s sînt polarizarea nerezonantă, respectiv, rezonantă induse de semnalul exterior.

Cîmpul total va avea intensitatea

$$E(t) = E_L(t)\exp[i\omega_L t] + \{E_1(t)\exp[i\omega t] + c.c.\} \qquad (6.16.2)$$

unde $E_L(t)$ este amplitudinea cîmpului radiației laser iar $E_1(t)$ este amplitudinea cîmpului injectat, ambele presupuse lent variabile în timp.

Amplitudinea cîmpului electric satisface ecuaţia

$$\frac{d^2E}{dt^2} + \frac{1}{\tau_c}\frac{dE}{dt} + \omega_L^2 E = -\frac{d^2P}{dt^2}\frac{1}{\varepsilon} \qquad (6.16.3)$$

unde ε este permitivitatea dielectrică a mediului laser.

Polarizarea este legată de intensitatea cîmpului, în acest caz, prin relaţia

$$P(t) - (P_1^s \exp[i\,\omega\,t] + c.c.) = \varepsilon_0\chi_L E(t) \qquad (6.16.4)$$

deoarece P^s este polarizarea la o frecvenţă diferită de ω_L, iar χ_L este susceptivitatea electrică rezonantă la această frecvenţă.

Ţinînd seama de fenomenele de saturare şi de faptul că schimbul de energie dintre cîmp şi mediu este caracterizat de partea imaginară a susceptibilităţii vom lua în considerare numai această parte şi vom scrie

$$\chi_L = i\chi_L'' = \frac{i\alpha_0}{1 + \alpha_1 E^2} \qquad (6.16.5)$$

unde α_0 este o mărime legată de cîştigul nesaturat al mediului iar α_1 este parametrul de saturare.

Considerînd că situaţia este departe de saturare $\alpha_1 E^2 \ll 1$ putem scrie

$$\chi_L = i\alpha_0(1 - \alpha_1 E^2) \qquad (6.16.6)$$

Cu aceasta ecuaţia (6.16.3) devine

$$\frac{d^2E}{dt^2} + \frac{1}{\tau_c}\frac{dE}{dt} + \omega_L^2 E = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2}{dt^2}\{\varepsilon_0 E i\alpha_0(1 - \alpha_1 E^2) +$$

$$+ (P_1^s \exp[i\omega t] + c\cdot c)\} \qquad (6.16.7)$$

Scriem :

$$E_L(t) = E_0(t) \exp[i\varphi_0(t)]$$

$$E_1(t) = E_{01}(t) \exp[i\varphi_1(t)] \qquad (6.16.8)$$

cu $E_0(t)$, $E_{01}(t)$, $\varphi_0(t)$ şi $\varphi_1(t)$ mărimi reale foarte lent variabile în timp.

Considerînd indicele de refracţie al mediului $n_r \approx 1$ ecuaţia (6.16.7.) devine

$$\frac{d^2E}{dt^2} + \frac{1}{\tau_c}\frac{dE}{dt} + \omega_L^2 E = -\frac{d^2}{dt^2}\Big\{Ei\alpha_0(1-\alpha_1E^2) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_0}(P^s \exp[i\omega t] + c\cdot c.)\Big\}. \qquad (6.16.9)$$

Introducînd ecuaţia (6.16.8) în ecuaţia (6.19.9), neglijînd derivatele de ordin doi şi separînd termenii pe diferite frecvenţe obţinem

$$2\,\omega_L \frac{d_0}{d\varphi t} E_0 = -\left[2\left(\alpha_0\omega - \frac{1}{\tau_c}\right) - \frac{3}{2}\,\alpha_0\alpha_1(3E_0^2 + 2E_{01}^2)\,\omega_L\right]\frac{dE_0}{dt} +$$

$$+ 6\,\alpha_0\alpha_1\omega_L E_0 E_{01}\frac{dE_{01}}{dt} \qquad (6.16.10.)$$

$$\frac{2dE_0}{dt} - 2\,\alpha_0\,\frac{d\varphi_0}{dt}\,E_0(t) = \left[\left(\alpha_0\omega_L - \frac{1}{\tau_c}\right) - \frac{3}{4}\,\alpha_0\alpha_1\omega_L(E_0^2 + 2E_{01}^2)\right]E_0, \qquad (6.16.11)$$

$$2\omega_L\left(\Delta\omega + \frac{d\varphi_1}{dt}\right)E_{01} = \left[\left(2\alpha_0\omega_L + \frac{1}{\tau_c}\right) - \frac{3}{2}\,\alpha_0\alpha_1\omega_L(3E_{01}^2 + 2E_0^2)\right]\frac{dE_{01}}{dt} +$$

$$+ 6\,\alpha_0\alpha_1\omega_L E_0 E_{01}\,\frac{dE_0}{dt} - \frac{\omega}{\varepsilon_0}\,P_1^s\cos\,\varphi_1 \qquad (6.16.12)$$

$$\frac{2dE_{01}}{dt} - 2\,\alpha_0\,\frac{d\varphi_1}{dt}\,E_{01}(t) = \left[\left(\alpha_0\omega - \frac{1}{\tau_c}\right) - \frac{3}{4}\,\alpha_0\alpha_1\omega\,(E_{01}^2 - 2\,E_0^2)\right]E_{01} -$$

$$-\frac{\omega}{\varepsilon_0}\,P_1^s\sin\,\varphi_1 \qquad (6.16.13)$$

unde $\Delta\omega = \omega_L - \omega$.

În cazul staționar ecuațiile (6.16.10), (6.16.11), (6.16.12), (6.16.13) devin

$$\alpha_0\omega_L - \frac{1}{\tau_c} = \frac{3}{4}\alpha_0\alpha_1\omega_L(E_0^2 + 2E_{01}^2) \qquad (6.16.14)$$

$$2\,\omega_L\Delta\omega E_{01} = -\frac{\omega}{\varepsilon_0} P_1^s \cos\,\varphi_1 \qquad (6.16.15)$$

$$\left[\alpha_0\omega - \frac{1}{\tau_c} - \frac{3}{4}\alpha_0\alpha_1\omega(E_{01}^2 + 2E_0^2)\right]E_{01} = \frac{\omega}{\varepsilon_0} P_1^s \sin\,\varphi_1 \qquad (6.16.16)$$

Notînd

$$\alpha_0\omega_L - \frac{1}{\tau_c} = \beta \quad \text{şi} \quad a_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\frac{3}{4}\alpha_0\alpha_1\omega_L}}$$

ecuațiile (6.16.14), (6.16.15) şi (6.16.16) devin

$$\left(\frac{2\,\omega_L\Delta\omega E_{01}}{\omega}\right)^2 = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0^2} P_1^{s^2} \cos^2\,\varphi_1 \qquad (6.16.15')$$

$$\left[\alpha_0\omega - \frac{1}{\tau_c} - \frac{3}{4}\alpha_1\alpha_0\omega(E_{01}^2 + 2E_0^2)\right]^2 E_{01}^2 = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0^2} P_1^{s^2} \sin^2\,\varphi_1 \qquad (6.16.16')$$

$$E_0^2 + 2E_{01}^2 = a_0^2. \qquad (6.16.14')$$

Adunînd ecuațiile (6.16.15′) şi (6.16.16′) şi folosind (6.16.14) găsim

$$\left\{\frac{4\omega_L^2(\Delta\omega)^2}{\omega^2} + \left[\alpha_0\omega - \frac{1}{\tau_c} - \frac{3}{4}\alpha_0\alpha_1\omega(E_{01}^2 + 2E_0^2)\right]^2\right\}E_{01}^2 = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0^2} P_1^{s^2} \cdot \qquad (6.16.17)$$

În cazul cînd $E_0 = 0$ adică oscilația nu se produce decît la frecvența oscilației injectate ω ecuația (6.16.17) devine

$$\frac{\omega^2}{\varepsilon_0} P_1^{s^2} = E_{01}^2\left[(2\Delta\omega)^2 + \left(\alpha_0\omega - \frac{1}{\tau_c} - \frac{3}{4}\alpha_0\alpha_1\omega E_{01}^2\right)^2\right] \qquad (6.16.18)$$

sau

$$\frac{\omega^2}{\varepsilon_0^2} P_1^{s^2} = E_{01}^2\left[(2\,\Delta\omega)^2 + \left(\beta - \frac{\beta}{a_0^2} E_{01}^2\right)^2\right]$$

sau încă

$$\frac{\omega^2}{\varepsilon_0^2} P_1^{s^2} = E_{01}^2\left[(2\,\Delta\omega)^2 + \beta^2\left(1 - \frac{E_{01}^2}{a_0^2}\right)^2\right] \qquad (6.16.19)$$

Dar conform ecuației (6.16.14′) cînd $E_0 = 0$

$$a_0^2 = 2E_{01}^2$$

astfel încît ecuația (6.16.19) devine

$$\frac{\omega^2}{\varepsilon_0^2} P_1^{s^2} = \frac{a_0^2}{2}\left[(2\,\Delta\omega)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right]. \qquad (6.16.20)$$

Conform teoriei electromagnetismului membrul stîng este proporțional cu puterea schimbată de sursa exterioară cu unitatea de volum a mediului laser, deci cu intensitatea undei injectate.

Se observă din ecuația (6.16.20) că intensitatea necesară pentru a realiza blocarea frecvenței este cu atît mai mare cu cît cîștigul este mai mare, deoarece $a_0^2 \sim \alpha_0$.

De asemenea se observă că cu cît depărtarea $\Delta\omega$ dintre frecvența oscilațiilor libere și frecvența oscilației de forțare este mai mare, cu atît puterea sursei care produce forțarea trebuie să fie mai mare.

6.17. 1°. Banda de trecere a fasciculului laser este

$$B = \frac{1}{1000}\,\omega_{\text{laser}} = \frac{1}{1000}\,\frac{c}{\lambda_{\text{laser}}} = \frac{3\cdot 10^8}{1000\cdot 0{,}44\cdot 10^{-6}} = 4{,}5\cdot 10^{11}\ \text{Hz}$$

iar capacitatea de transmisie este

$$C = B\log_2\left(1 + \frac{\bar{\mathscr{P}}_{\text{laser}}}{\bar{\mathscr{P}}_{zg}}\right) = 4{,}5\cdot 10^{11}\log_2\left(1 + \frac{10^{-1}}{10^{-11}}\right) \approx 2\cdot 10^{12}\ \text{biți/s}.$$

2°. Numărul de canale telefonice care pot fi transmise simultan se obține din raportul

$$\mathrm{N}_{\text{canale telefonice}} = \frac{B}{B_{c.t}} = \frac{4{,}5\cdot 10^{11}}{4{,}2\cdot 10^3} \approx 10^8.$$

3°. Numărul de programe de televiziune care pot fi transmise simultan este

$$N_{telev} = \frac{B}{B_{tv}} = \frac{4{,}5 \cdot 10^{11}}{6 \cdot 10^{6}} = 7 \cdot 10^{4}$$

6.18. 1°. În prezența cîmpului magnetic B_0, nivelele atomice se despică și apar tranziții numai între nivele pentru care $\Delta M = 0, \pm 1$, polarizările radiațiilor fiind respectiv π, σ_+ și σ_-. Din teoria efectului Zeeman se găsește diferența în frecvență între două subnivele Zeeman adiacente

$$\Delta\omega_B = \frac{g\mu_B B_0}{\hbar} \tag{6.18.1}$$

$$\Delta\omega_B = 1{,}14 \cdot 10^4 \cdot B_0 \text{ MHz/T}.$$

Diferența de frecvență între nivelele cu $M = +1$ și $M = -1$ este

$$\Delta\omega_\pm = 2\Delta\omega_B = 2{,}28 \cdot 10^4 \, B_0 \text{ MHz/T}. \tag{6.18.2}$$

2°. Să notăm cu $|q_+\rangle$, $|q_-\rangle$ modul TEM_{00q} de polarizare σ_+, respectiv σ_-. Diferența între frecvențele modurilor axiale succesive ale rezonatorului este

$$\Delta\omega_{q,q+1} = \frac{\pi c}{L} \approx 942 \text{ MHz}. \tag{6.18.3}$$

Rezultă domeniul cîmpurilor slabe, pentru care

$$\Delta\omega_\pm \ll \Delta\omega_{q,q+1} \quad 0 < B_0 < 5 \cdot 10^{-3} \text{ T}.$$

Pentru $B_0 > 2 \cdot 10^{-2}$ T, ajungem în domeniul cîmpurilor puternice, iar la $B_0 \approx 414 \cdot 10^{-4} \, T$, $\Delta\omega_\pm = \Delta\omega_{q,q+1}$.

a) Frecvențele pe care oscilează modurile $|q-\rangle$ și $|q+\rangle$ rezultă din problema (3.2) (fenomenul de tîrîre a frecvenței)

$$\omega_{q+} = \omega_q + \frac{Q_m}{Q_c}(\omega_{a_0+} - \omega_q) \tag{6.18.4}$$

$$\omega_{q-} = \omega_q + \frac{Q_m}{Q_c}(\omega_{a_0-} - \omega_q) \tag{6.18.5}$$

ω_{q0+} și ω_{q0-} sînt frecvențele de oscilație în absența fenomenului de tîrîre a frecvenței, iar Q_m este factorul de calitate al mediului

$$Q_m = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0} = \frac{2\pi c}{\lambda_0 \Delta\omega_0} = 2{,}6 \cdot 10^4 \qquad (6.18.6)$$

$$\omega_{q+} - \omega_{q-} = \frac{Q_m}{Q_c} \Delta\omega_{\pm} \approx 6 \cdot 10^6 \, B_0 \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-1}. \qquad (6.18.7)$$

Există două componente ale cîmpului electric, polarizate circular dreapta și stînga, de frecvențe diferite. Polarizorul lasă să treacă numai undele al căror vector electric oscilează într-o anumită direcție. Problema se reduce la compunerea a două oscilații paralele, de frecvențe diferite, ω_{q+} și ω_{q-}, căci proiecțiile cîmpurilor pe direcția polarizorului sînt: $E_1 \cos \omega_{q+} t$ și $E_2 \cos \omega_{q-} t$. Rezultatul compunerii este o undă modulată în amplitudine, cu frecvența de modulație $\omega_{q+} - \omega_{q-}$ (fenomenul de bătăi). Pentru cîmpuri B_0 mici frecvența de modulație este de cîțiva kHz ($B_0 < 20$ Gs).

b) În acest caz, distanța în frecvență dintre componentele Zeeman cu $M = 1$ și $M = -1$ fiind de ordinul de mărime al diferenței între frecvențele a două moduri axiale succesive, apare oscilația în aceste două moduri. Vor oscila așadar: modul TEM_{00q-1} cu polarizare σ_- și modul TEM_{00q} cu polarizare σ_+. Discuția de la punctul a) rămîne valabilă. Intensitatea detectată după polarizare este modulată cu o frecvență aproximativ egală cu $\Delta\omega_{q,q+1} = 942$ MHz.

3°. Presupunem că oscilează următoarele moduri: $|q^{-1} -\rangle$, $|q_-\rangle$, $|q_+\rangle$ și $|q^{+1} +\rangle$.

Cîmpul electric total este

$$E(t) = E_1 \exp\left[-i(\omega_q - \Delta\omega_q)t\right] + E_2 \exp\left[-i\omega_q t\right] +$$

$$+ E_3 \exp\left[i\omega_q t\right] + E_4 \exp\left[i(\omega_q + \Delta\omega_q)t\right] \qquad (6.18.8)$$

Am neglijat tîrîrea frecvenței, deoarece acum diferențele între frecvențele de oscilație sînt de ordinul de mărime $\Delta\omega_{q,q+1}$. Deoarece

$\Delta\omega_{q,q+1} = \Delta\omega_B$ din cauza simetriei profilurilor de cîștig, vor exista egalitățile (fig. 6.18R)

$$|E_1| = |E_3| \text{ și } |E_2| = |E_4| \tag{6.18.9}$$

$$I(t) = |E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2 + |E_4|^2 + (E_1E_2^* + E_3^*E_4)\exp[i\Delta\omega_{q,q+1}t] + \\ + (E_1^*E_2 + E_3E_4^*)\exp[-i\Delta\omega_{q,q+1}t) \tag{6.18.10}$$

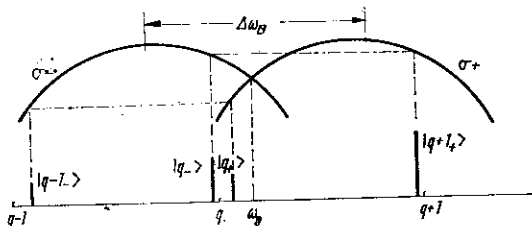


Fig. 6.18R

Intensitatea este constantă dacă

$$E_1E_2^* + E_3^*E_4 = 0 \tag{6.18.11}$$

sau

$$|E_1E_2| = |E_3E_4| \text{ și} \tag{6.18.12}$$

$$\arg(E_1 - E_2) + \arg(E_4 - E_3) = 0 \tag{6.18.13}$$

condiția (6.18.12) este îndeplinită. Intensitatea $I(t)$ este constantă, dacă $\Delta\omega_B = \Delta\omega_{q,q+1}$ și între fazele cîmpurilor există relația (6.18.13).

6.19. 1°. Deplasarea prin efect Doppler a frecvenței este

$$\omega' = \omega_0\left(1 - \frac{v}{c}\right) \tag{6.19.1}$$

unde $v = \frac{ds}{dt} = a\omega_m \cos\omega_m t$

Rezultă

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega' = \frac{2\omega_0}{c} a\omega_m \cos\omega_m t.$$

Factorul 2 apare deoarece are loc un efect Doppler dublu : odată membrana este receptor și a doua oară emițător

2°. $u_2 = A \exp [i(\omega' t + \varphi)] = A \exp [i(\omega_0 t + \varphi + \Delta\varphi)$

Deoarece : $\Delta\omega = \frac{d(\Delta\varphi)}{dt}$

se obține
$$\Delta\varphi = \int \Delta\omega \, dt = \frac{2\omega_0}{c} a \sin \omega_m t. \qquad (6.19.3)$$

Atunci

$$u_2 = A \exp \left[i \left(\omega_0 t + \frac{2\omega_0 a}{c} \sin \omega_m t + \varphi \right) \right] \qquad (6.19.4)$$

Notînd
$$\frac{2\omega_0 a}{c} = \frac{(\Delta\omega)_{max}}{\omega_m} = \beta \qquad (6.19.5)$$

se poate scrie

$$u_2 = A \exp [i(\omega_0 t + \beta \sin \omega_m t + \varphi)] \qquad (6.19.6)$$

expresie tipică pentru o undă modulată în frecvență.

3°. Pentru simplificarea calculelor se va neglija faza inițială. Partea reală a undei reflectate va fi

$$u_2 = \cos [\omega_0 t + \beta \sin \omega_m t] = A \cos \omega_0 t \cos (\beta \sin \omega_m t) -$$
$$- A \sin \omega_0 t \sin (\beta \sin \omega_m t). \qquad (6.19.7)$$

S-au găsit două componente avînd frecvența ω_0 și amplitudinile $A \cos (\beta \sin \omega_m t)$, $A \sin \beta \sin \omega_m t)$, variabile în timp, care se pot dezvolta în serie Fourier

$$\cos (\beta \sin \omega_m t) = J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos 2\omega_m t + 2J_4(\beta) \cos (4\omega_m t) +$$
$$+ \sin (\beta \sin \omega_m t) = 2J_1(\beta \sin \omega_m t) + 2J_3(\beta) \sin 3\omega_m t + \ldots$$

Înlocuind în (6.19.7) se obţine

$$u_2 = A\{\cos \omega_m t[J_0(\beta) + 2J_2(\beta)\cos 2\omega_m t + \dots] -$$

$$- \sin \omega_0 t[2J_1(\beta)\sin \omega_m t + 2J_3(\beta)\sin 3\omega_m t + \dots]\} =$$

$$= A\{J_0(\beta)\cos \omega_0 t + J_1(\beta)[\cos(\omega_0 + \omega_m)t -$$

$$- \cos(\omega_0 - \omega_m)t] + J_2(\beta)[\cos(\omega_0 + 2\omega_m)t +$$

$$+ \cos(\omega_0 - 2\omega_m)t] + \dots + J_n(\beta)[\cos(\omega_0 + n\omega_m)t +$$

$$+ (-1)^n \cos(\omega_0 - n\omega_m)t]\} \tag{6.19.8}$$

Folosind relaţiile de recurenţă

$J_{-n}(\beta) = -J_n(\beta)$ pentru n impar

$J_{-n}(\beta) = J_n(\beta)$ pentru n par

rezultă

$$u_2 = A\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\cos[(\omega_0 + n\omega_m)t] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[A\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\cdot\exp[i(\omega_0 + n\omega_m t)]\right].$$

4°. Considerînd semnalul analitic asociat lui u_2

$$u_2 = A\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\exp[i(\omega_0 + n\omega_m)t]$$

şi ţinînd cont că iluminarea suprafeţei detectorului este

$$\mathscr{I} = |u_1 + u_2|^2 = (u_1 = u_2)\ (u_1^* + u_2^*) \tag{6.19.9}$$

rezultă curentul semnalului de ieşire

$$\begin{aligned} I_s &= \text{const.}\ \mathscr{I} = \text{const.}\ [u_1^* u_2 + u_2^* u_1 + \text{const.}] = \\ &= \text{const.}\ A^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_m(\beta)\, e^{in\omega_m t} + \text{const.} \end{aligned} \tag{6.19.10}$$

Primul termen redă semanlul modulat la ieşirea din detector, al doilea fiind neinteresant din punct de vedere al detecţiei.

6.20. Din ecuaţia elipsoidului indicilor

$$\left[\left(\frac{1}{n_r^2}\right)_{ij} + R_{ijkl}E_kE_l\right]X_iX_j = 1 \qquad (6.20.1)$$

cu ajutorul notaţiei lui Voigt, care se face după regula

m	n	1	2	3	4	4	5	5	6	6
i	k	1	2	3	2	3	1	3	2	1
j		1	2	3	3	2	3	1	1	2

(6.20.2)

datorită simetriilor tensorului electrooptic R_{ijkl}, se deduce următoarea formă a coeficienţilor electrooptici

$$R_{ijkl} = R_{mn}. \qquad (6.20.3$$

Deoarece cîmpul electric se aplică după axa X_2, iar propagarea se face după axa X_3, ecuaţia elipsei de intersecţie cu planul $X_3 = 0$, permite determinarea indicilor de refracţie după direcţiile X_1 şi X_2.

$$\left(\frac{1}{n_r^2} + R_{12}E^2\right)X_1^2 + \left(\frac{1}{n_r^2} + R_{22}E^2\right)X_2^2 + 2R_{62}E^2X_1X_2 = 1 \quad (6.20.4)$$

Ecuaţia (6.20.4) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{X_1^2}{n_{r1}^2} + \frac{X_2^2}{n_{r2}^2} + 2R_{62}E^2X_1X_2 = 1 \qquad (6.20.5)$$

cu ajutorul notaţiilor

$$\frac{1}{n_{r1}^2} = \frac{1}{n_r^2} + R_{12}E^2 \qquad (6.20.6)$$

$$\frac{1}{n_{r2}^2} = \frac{1}{n_r^2} + R_{22}E^2. \qquad (6.20.7)$$

Astfel, la propagarea după axa X_3, indicii de refracţie n_{r1} şi n_{r2}, sînt diferiţi de n_r, şi depind de pătratul cîmpului electric.

Scriind (6.20.6) şi (6.20.7) sub forma

$$n_{r1} = n_r + \delta n_{r1} \qquad (6.20.8)$$

$$n_{r2} = n_r + \delta n_{r2} \qquad (6.20.9)$$

şi ţinînd seama de relaţia

$$R_{mn}E_kE_l \ll \left(\frac{1}{n_r^2}\right)_{ij} \qquad (6.20.10)$$

rezultă

$$\delta n_{r1} = -\frac{1}{2} n_r^3 R_{12} E^2 \qquad (6.20.11)$$

$$\delta n_{r2} = -\frac{1}{2} n_r^3 R_{22} E^2 \qquad (6.20.12)$$

Deoarece $d\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} L_z \, dn_r$, rezultă că fiecare componentă a cîmpului electric va fi defazată cu o cantitate proporţională cu E^2.

Se obţine pentru $\Delta\Phi$ expresia

$$\Delta\Phi = (n_{r1} - n_{r2}) \frac{2\pi L_z}{\lambda_0} \qquad (6.20.13)$$

$$\Delta\Phi = \frac{\pi L_z}{\lambda_0} \cdot n_r^3 E^2 (R_{22} - R_{12}). \qquad (6.20.13)$$

2°.
$$\bar{E} = \bar{E}_{y0} + \bar{E}(t) \qquad (6.20.14)$$

cu
$$|\bar{E}(t)| \ll |\bar{E}_{y0}|. \qquad (6.20.14)$$

Cîmpul electric aplicat are o componentă variabilă şi una continuă, pentru a se obţine o variaţie liniară a retardării cu semnalul electric modulator.

Într-adevăr

$$|\bar{E}|^2 = |\bar{E}_{y0}|^2 + 2|\bar{E}_{y0}|\,|\bar{E}(t)| + |\bar{E}(t)|^2 \qquad (6.20.15)$$

și cu condiția $|\bar{E}(t)| \ll |\bar{E}_{y0}|$, $|\bar{E}|^2$ devine neglijabil.
Expresia (6.20.13) se scrie

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_0 + \frac{2\pi L_z}{\lambda_0} n_r^3 E_{y0} \cdot E(t)\,(R_{22} - R_{12}). \qquad (6.20.16)$$

Deoarece $|\bar{E}(t)| = \frac{U(t)}{L_y}$, neglijînd defazajul constant $\Delta\Phi_0$, se obține

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_r^3 (R_{22} - R_{12})\,|\bar{E}_{y0}|\,U(t)\,\frac{L_z}{L_y}. \qquad (6.20.17)$$

Pentru $\Delta\Phi = \pi$, rezultă

$$U_{\lambda/2} = \frac{\lambda_0}{2n_r^2(R_{22} - R_{12})\,|\bar{E}_{0y}|}\,\frac{L_y}{L_z}. \qquad (6.20.18)$$

3°. Relațiile (6.20.8) și (6.20.9) se mai pot scrie sub forma

$$n_{rx} = n_r + \delta n_{rx} \qquad (6.20.19)$$

$$n_{ry} = n_r + \delta n_{ry}. \qquad (6.20.20)$$

Ținînd seama de direcția după care este aplicat cîmpul rezultă

$$n_{r\|} = n_{ry}, \quad n_{r\perp} = n_{rx}$$

$$\delta n_{r\|} - \delta n_{r\perp} = n_{ry} - n_{rx} = \delta n_{ry} - \delta n_{rx}. \qquad (6.20.21)$$

Introducînd (6.20.11) și (6.20.12) în (6.20.21) se obține

$$\left(-\frac{1}{2} n_r^3 R_{22} + \frac{1}{2} n_r^3 R_{12}\right) E^2 = B\lambda_0 E^2 \qquad (6.20.22)$$

pe unde rezultă B

$$B = \frac{1}{2}\,\frac{n_r^3(R_{12} - R_{22})}{\lambda_0}.$$

6.21. 1°. Elipsoidul indicilor

$$\left(\frac{1}{n_{r1}^2} + r_{1k}E_k\right)X_1^2 + \left(\frac{1}{n_{r2}^2} + r_{2k}E_k\right)X_2^2 + \left(\frac{1}{n_{r3}^2} + r_{3k}E_k\right)X_3^2 +$$

$$+ 2r_{4k}E_kX_2X_3 + 2r_{5k}E_kX_1X_3 + 2r_{6k}E_kX_1X_2 = 1 \qquad (6.21.1)$$

se reduce, în condițiile problemei, la ecuația

$$\frac{X^2}{n_{re}^2} + \frac{Y^2}{n_{re}^2} + \frac{Z^2}{n_{re}^2} + 2r_{63}EXY = 1. \qquad (6.21.2)$$

Se observă că aplicarea lui $\bar{E}$ paralel cu Z nu schimbă axa principală Z, deci pentru a reduce elipsoidul la noile axe principale X', Y', Z, trebuie făcută o rotație cu unghiul α în jurul axei Z.

Pentru calculul noilor indici n_x', n_y', vom intersecta elipsoidul cu planul $Z = 0$.

$$\frac{X^2}{n_{r0}^2} + \frac{Y^2}{n_{r0}^2} + 2r_{63}EXY = 1 \qquad (6.21.3)$$

Expresia care determină rotirea axelor unei elipse pentru a fi adusă la axele principale este următoarea

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r_{63}E_3}{\dfrac{1}{n_{r1}^2} - \dfrac{1}{n_{r2}^2} + (r_{13} - r_{23})E_3}. \qquad (6.21.4)$$

Pentru cazul cristalului KDP, $n_{r1} = n_{r2} = n_0$, $r_{13} = r_{23} = 0$,

Rezultă $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Elipsa (6.21.3) redusă la axele ei principale, prin rotirea cu $\alpha = \frac{\pi}{4}$ este de forma

$$\frac{X'^2}{n_{rx}'^2} + \frac{Y'^2}{n_{ry}'^2} = 1. \qquad (6.21.5)$$

Din teoria cunoscută, a reducerii unei conice la axele ei principale, rezultă

$$\frac{1}{n_{rx}'^2} = \frac{1}{n_{r0}^2} + r_{63}E \tag{6.21.6}$$

$$\frac{1}{n_{ry}'^2} = \frac{1}{n_{r0}^2} - r_{63}E. \tag{6.21.7}$$

Pentru indicii de refracţie principali, în raport cu noile axe se găsesc expresiile

$$n_{rx}' = n_{r0} - \frac{1}{2}\, n_{r0}^2 r_{63} E \tag{6.21.8}$$

$$n_{ry}' = n_{r0} + \frac{1}{2}\, n_{r0}^3 r_{63} E. \tag{6.21.9}$$

Rezultă că la propagarea după axa Z, cristalul uniax se comportă birefrigent. Se obţine pentru birefringenţa indusă expresia

$$b = n_{ry}' - n_{rx}' = n_{r0}^3 r_{63} E. \tag{6.21.10}$$

2°. Expresiile (6.21.8) şi (6.21.9) se pot pune sub forma

$$n_{rx}' = n_{r0} + \delta n_{rx}' \tag{6.21.11}$$

$$n_{ry}' = n_{r0} + \delta n_{ry}'. \tag{6.21.12}$$

Să calculăm defazajele suplimentare introduse undelor electromagnetice, polarizate după axele X şi Y, datorită variaţiilor $\delta n_x'$, $\delta n_y'$, ale indicilor de refracţie

$$\varphi = kx = \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{2\pi L n_r}{\lambda_0} \tag{6.21.11}$$

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi L}{\lambda_0}\, \mathrm{d}n_r \tag{6.21.12}$$

unde L_z reprezintă parcursul razei luminoase după axa Z, iar λ_0, lungimea de undă în vid

$$\delta\varphi_{x'} = \frac{2\pi L_z}{\lambda_0}\, \delta n_{rx'} \tag{6.21.13}$$

$$\delta\varphi_{y'} = \frac{2\pi L_z}{\lambda_0}\, \delta n_{ry'} \tag{6.21.14}$$

Rezultă

$$d\varphi = \varphi_{y'} - \varphi_{x'} = \frac{2\pi}{\lambda_0} Lb \tag{6.21.15}$$

$$\Delta\Phi_l = \varphi_{y'} - \varphi_{x'} = \frac{\omega n_{r0}^3 r_{63}}{c} E_z L_z. \tag{6.21.16}$$

3°. Expresia lui $\Delta\Phi$ se poate exprima în funcţie de tensiunea aplicată pe cristalul modulator.

$$U = E_z L_z \tag{6.21.17}$$

$$\Delta\Phi_l = \frac{\omega n_{r0}^3 r_{63}}{c} U. \tag{6.21.18}$$

Pentru $\Delta\Phi = \pi$, se obţine

$$U_{\lambda/2l} = \frac{\pi c}{\omega n_{r0}^3 r_{63}} \tag{6.21.19}$$

astfel că retardarea $\Delta\Phi$ devine

$$\Delta\Phi_l = \frac{\pi U}{U_{\lambda/2l}}\cdot \tag{6.21.20}$$

4°. În cazul efectului electrooptic transversal propagarea se face după axa Y', astfel că nu interesează variaţiile indicilor de refracţie după axele X' şi Z

$$\delta n_{rx'} = -\frac{1}{2} n_{r0}^3 r_{63} E \tag{6.21.21}$$

$$\delta n_{rz} = 0 \tag{6.21.22}$$

$$b = +\frac{1}{2} n_{r0}^3 r_{63} E \tag{6.21.23}$$

$$\Delta\Phi_t = -\frac{\pi}{\lambda_0} n_{r0}^3 r_{63} E L_y', \tag{6.21.24}$$

unde L_y este lungimea cristalului după direcţia y'.

Ţinînd seama de expresia cîmpului aplicat

$$E = \frac{U}{L_z} \tag{6.21.25}$$

L_z fiind lungimea cristalului după axa Z, expresia retardării $\Delta\Phi$ devine

$$\Delta\Phi_t = -\frac{\pi}{\lambda_0} n_{r0}^3 r_{63} U \frac{L'_y}{L_z} \tag{6.21.26}$$

Cu condiţia $\Delta\Phi = \pi$, se obţine

$$U_{\lambda/2\,t} = \frac{\lambda_0}{n_{r0}^3 r_{63}} \frac{L_z}{L'_y}. \tag{6.21.27}$$

Se observă că în cazul efectului electro-optic transversal, tensiunea depinde de dimensiunile cristalului modulator.

5°. Aplicaţia numerică:

$$U_{\lambda/2\,l} = \frac{\lambda_0}{2n_{r0}^3 r_{63}} = 6{,}85 \text{ kV}$$

$$U_{\lambda/2\,t} = \frac{\lambda_0}{n_{r0}^3 r_{63}} \frac{L_z}{L'_y} = 4{,}56 \text{ kV}.$$

6.22. 1°. a) $E_x = 1,\ E_y = 0$ (6.22.1)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.22.2}$$

b) $E_x = 0, \quad E_y = 1$ (6.22.3)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.22.4}$$

c) $E_x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad E_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (6.22.5)

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.22.6}$$

d)
$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{6.22.7}$$

e)
$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.22.8}$$

f)
$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.22.9}$$

$2°$. a) $E_x = 1, \quad E_y = 0.$ (6.22.10)

$$[E_xE_x^*] = 1, \ [E_xE_y^*] = 0, \ [E_yE_x^*] = 0, \ [E_yE_y^*] = 0 \quad (6.22.10)$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.22.11)$$

b) $$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.22.12)$$

c) $$J = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.22.23)$$

d) $$J = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.22.14)$$

e) $$J = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (6.22.15)$$

f) $$J = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (6.22.16)$$

3°: $$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (6.22.17)$$

a) $$\mathrm{I}\begin{cases} E'_x = E_x \exp\,[-i\Delta\Phi] \\ E'_y = E_y \exp\,[-i\Delta\Phi] \end{cases} \quad (6.22.18)$$

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (6.22.19)$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} E'_x = C_{11}E_x + C_{12}E_y \\ E'_y = C_{21}E_x + C_{22}E_y. \end{cases} \quad (6.22.20)$$

Comparind (6.22.18) cu (6.22.20) rezultă

$$c_{11} = \exp\ [i\Delta\Phi], \ c_{12} = 0, \ c_{21} = 0, \ c_{22} = \exp\ [-i\Delta\Phi] \quad (6.22.21)$$

$$C_{2\Delta\Phi} = \begin{bmatrix} \exp\ [\mathrm{i}\Delta\Phi] & 0 \\ 0 & \exp[-\mathrm{i}\Delta\Phi] \end{bmatrix}. \quad (6.22.22)$$

b) Rotirea sistemului de axe de coordonate cu un unghi θ, este definită de transformarea

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \tag{6.22.23}$$

Ca urmare, între componentele E'_x şi E'_y ale cîmpului electric, în urma rotirii planului de polarizare pentru unda luminoasă, şi componentele E_x, E_y, există relaţiile

$$E'_x = E_x\cos\theta - E_y\sin\theta$$
$$E'_y = E_x\sin\theta + E_y\cos\theta. \tag{6.22.24}$$

Comparînd (6.22.24) cu (6.22.20) rezultă

$$C_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{6.22.25}$$

c)
$$E'_x = E_x \exp[-\Gamma_x x]$$
$$E'_y = E_y \exp[-\Gamma_y y] \tag{6.22.26}$$

Comparînd (6.22.26) cu (6.22.20) rezultă

$$C_{\Gamma_x\Gamma_y} = \begin{bmatrix} \exp[-\Gamma_x x] & 0 \\ 0 & \exp[\Gamma_y y] \end{bmatrix}. \tag{6.22.27}$$

4°. Dacă I_i este intensitatea fasciculului laser la intrarea în sistemul de modulare, deoarece planul de polarizare al undei luminoase face unghiul de 45° cu axa X (vezi figura 6.22.1.), matricea de polarizare pentru fasciculul laser va fi

$$Q_i = \sqrt{\frac{I_i}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.22.28}$$

Lama $\lambda/4$ introduce un defazaj între componentele E_x şi E_y ale cîmpului electric de $\Delta\Phi = \frac{\pi}{2}$, necesar pentru a se stabili compo-

nenta optică continuă care polarizează modulatorul. Operatorul care descrie lama $\lambda/4$ are asociată matricea

$$C_{\pi/2} = \begin{bmatrix} \exp[i\pi/4] & 0 \\ 0 & \exp[-i\pi/4] \end{bmatrix}. \qquad (6.22.29)$$

Modulatorul introduce o retardare variabilă între componente E_x şi E_y descrisă de matricea

$$C_M = \begin{bmatrix} \exp[i\Delta\Phi/2] & 0 \\ 0 & \exp[-i\Delta\Phi/2] \end{bmatrix}. \qquad (6.22.30)$$

Matricea de lucru asociată analizorului se găseşte ţinînd seama de orientarea axelor sale în raport cu axele celorlalte componente ale sistemului de modulare

$$C_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.22.31)$$

Rezultă pentru matricea de polarizare a fasciculului la ieşire din sistemul de modulare expresia

$$Q_e = C_A C_M C_{\pi/2} Q_i \qquad (6.22.32)$$

$$Q_e = \sqrt{\frac{I_i}{2}}\, i \sin\left(\frac{\Delta\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (6.22.33)$$

b) $$I_e = \frac{I_i}{2}\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{I_i}{2}(1 + \sin\Delta\Phi). \qquad (6.22.34)$$

c) Deoarece se foloseşte efectul electrooptic liniar, $\Delta\Phi \sim u$, unde u este tensiunea sinusoidală aplicată pe cristalul modulator.

$$\Delta\Phi = K_m u = K_m U_m \sin\omega_m t. \qquad (6.22.35)$$

unde K_m este o constantă de proporţionalitate.

Introducînd (6.22.35) în (6.22.34) se obţine

$$I_e = \frac{I_i}{2}[1 + \sin(K_m U_m \sin\omega_m t). \qquad (6.22.36)$$

Expresia (6.22.36) se poate dezvolta în serie de funcții Bessel de ordin impar

$$I_e = \frac{I_i}{2} + [I_i J_1(K_m U_m) \sin \omega_m t + J_3(K_m U_m) \sin 3\omega_m t + \cdots] \tag{6.22.37}$$

Fie D gradul de distorsiune căutat

$$D = \frac{\sqrt{[J_3(K_m U_m)]^2 + \ldots . [J_5 (K_m U_m)]^2 + \cdots}}{J_1 (K_m U_m)} \cdot 100\,\% \tag{6.22.38}$$

d)

$$M = \frac{(I_e)_{max} - (I_e)_{mediu}}{(I_e)_{mediu}} \cdot 100\,\%. \tag{6.22.39}$$

Din (6.22.34) rezultă $(I_e)_{mediu}$

$$[\bar{I}_e] = \frac{I_i}{2} \tag{6.22.40}$$

$$(I_e)_{max} = \frac{I_i}{2} + I_i\, [J_1(K_m U_m) + J_3(K_m U_m) + \cdots]. \tag{6.22.41}$$

Pentru distorsiuni neglijabile

$$D \approx 0, \text{ rezultă } J_3 \approx J_5 \approx 0 \tag{6.22.42}$$

astfel că (6.22.41) devine

$$(I_e)_{max} = \frac{I_i}{2} + I_i J_1(K_m U_m). \tag{6.22.43}$$

Din (6.22.29) cu ajutorul relațiilor (6.22.40) și (6.22.43) se obține

$$M = 2J_1\,(K_m U_m) \cdot 100\,\% \tag{6.22.44}$$

6.23. Frecvențele de oscilație pentru modurile longitudinale ale laserului, în absența modulației sînt date de relația $\omega_q = q\,\frac{\pi c}{L}$, unde L reprezintă lungimea cavității laser, iar q un întreg.

Fie ω_q şi ω_{q+1} două frecvenţe succesive de oscilaţie ale cavităţii laser.

Frecvenţa de modulaţie ω va fi legată de ω_q şi ω_{q+1}, prin relaţia

$$\omega_{q+1} - \omega_q = \omega - \Delta\omega. \qquad (6.23.1)$$

Pentru a găsi modul de variaţie al amplitudinii diferitelor moduri de oscilaţie în prezenţa modulaţiei, se rezolvă ecuaţia

$$\frac{dG_q^*}{dt} + i\cdot q\Delta\omega G_q^* = -\frac{ik}{2}(G_{q+1}^* + G_{q-1}^*) \qquad (6.23.2)$$

considerîndu-se un regim staţionar de funcţionare, datorită condiţiei

$$\frac{dG_q^*}{dt} = 0 \qquad (6.23.3)$$

Se obţine ecuaţia

$$iq\Delta\omega G_q^* = -\frac{ik}{2}(G_{q+1}^* + G_{q-1}^*) \qquad (6.23.4)$$

care reprezintă o relaţie de recurenţă intîlnită la studiul funcţiilor Bessel, astfel că soluţia lui (6.23.4) se scrie

$$G_q^* = (-1)^q J_q\left(\frac{k}{\Delta\omega}\right) \qquad (6.23.5)$$

unde J_q este funcţia Bessel de ordin q întreg.

Folosind relaţia de definiţie a lui $G_q^*(t)$ dată de enunţ

$$C_q^*(t) = D_q^*(t)\exp(i\omega_q t) = G_q^*(t)\exp[i((\omega_q + q\Delta\omega)t = q\varphi)]$$

se obţin pentru variabilele $C_q^*(t)$ expresii de forma

$$C_q^*(t) = (-1)^q J_q\left(\frac{k}{\Delta\omega}\right)\exp[i((\omega_q + q\Delta\omega)t + q\varphi)]. \qquad (6.23.6)$$

Introducînd în (6.23.6) relaţia (6.23.1) rezultă

$$C_q^*(t) = (-1)^q J_q\left(\frac{k}{\Delta\omega}\right)\exp[i((\omega_0 + q\omega)t + q\varphi)]. \qquad (6.23.7)$$

Analizîndu-se relaţia (6.23.7) rezultă că amplitudinile diferitelor moduri longitudinale de oscilaţie sînt date de funcţiile Bessel de ordin întreg, iar fazele acestor moduri nu mai sînt independente între ele, fiind corelate prin relaţia (6.23.7). Amplitudinea rezultantă la ieşire se obţine prin însumarea amplitudinilor tuturor modurilor longitudinale.

$$C(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_q^*(t). \qquad (6.23.8)$$

Introducind (6.23.7) în (6.23.8) rezultă pentru $C(t)$ expresia

$$C(t) = \sin\left[\omega_0 t + \frac{k}{\omega\Delta}\sin(\omega t + \varphi)\right] \qquad (6.23.9)$$

unde ω_0 este frecvenţa modului central.

Expresia (6.23.9) este tipică pentru o undă modulată în frecvenţă.

2°. Din (6.23.9) se deduc caracteristicile de modulaţie ale undei modulate în frecvenţă:

— frecvenţă purtătoare, ω_0

— frecvenţă de modulaţie, ω

— indicile de modulaţie $\frac{k}{\Delta\omega} = \beta$.

6.24. Schema electrică simplificată este următoarea (fig. 6.24R).

R_B este o rezistenţă de balast, prin care condensatorul se încarcă de la sursa E.

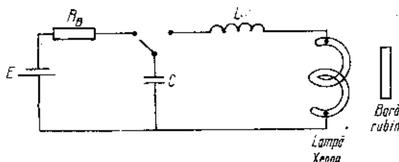


Fig. 6.24R

Adaptarea electrică cere ca rezistenţa tubului să fie egală cu impedanţa caracteristică a circuitului, Z_0

$$R = Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (6.24.1)$$

$$R = Z_0 = 0{,}176\ \Omega.$$

Lungimea pulsului este $T = 2\sqrt{LC} = 2Z_0C$. Alergînd $T = 500\,\mu s$, rezultă

$$C = 2{,}8\,\mathrm{mF}$$

$$L = 84\ \mu\mathrm{H}$$

La adaptare curentul din tub este

$$I = \frac{U_{opt}}{2Z_0} \tag{6.24.2}$$

căci $R = Z_0$.

Rezultă tensiunea optimă de descărcare

$$U_{opt} = 2Z_0I = 2Z_0AJ,\ \ U_{opt} = 1{,}380\ \mathrm{KV} \tag{6.24.3}$$

Energia acumulată în condensator

$$W = \frac{1}{2}\,CU_{opt}^2,\ \ W = 2{,}68\ \mathrm{kJ}.$$

Neglijînd pierderile din circuitul electric rezultă puterea pulsului

$$P = \frac{W}{T} = 4{,}36\ \mathrm{MW}.$$

Admițînd un randament de $1^0/_{00}$, pulsul laser emis de rubin va avea o energie de 2,7 J.

BIBLIOGRAFIE

[1] — *John C. SLATER*, *„Microwave Electronics"*, Dover Publications, Inc., New York, (1950)

[2] — *Enrico FERMI*, Rev. Mod. Phys., *4*, 131, (1932)

[3] — *W. HEITLER*, *„The Quantum Theory of Radiation"*, 2nd Edition, Section 6, Oxford University Press, (1944)

[4] — *A.G.FOX* şi *T.Li*, Proc. IRE *48*, 1904, (1960)

[5] — *A.G.FOX* şi *T. Li*, Bell System Tech. *J. 40*, 453, (1961)

[6] — *G.D.BOYD* şi *J.P.GORDON*, Bell. System Tech. *J. 40*, 484, (1961)

[7] — *Albert K. LEVINE* (Editor), *„Lasers. A series of Advances"* vol. I, Edward Arnold (Publishers) Ltd., London (1966); Marcel Dekker, Inc., New York (1966)

[8] — *F.T. ARECCHI* şi *E.O. SCHULZ-DUBOIS* (Editors), *„Laser Handbook"*, volume I, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1972)

[9] — *Albert EINSTEIN*, Verhandlung der Deutchen Physikalischen Gesellschaft *18*, 318, (1916)

[10] — *Albert EINSTEIN*, Physicalische Zeitschrift, *18*, 212, (1917)

[11] — *H. HAKEN*, *„Laser Theory"*, Handbuch der Physik, band XXV/2c (Licht und Materie I c), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1970)

[12] — *R.H. PANTELL* şi *H.E. PUTHOFF*, *„Fundamentals of Quantum Electronics"*, John Wiley and Sons., Inc., New York, (1969)

[13] — *Earl L. STEELE*, *„Optical Lasers in Electronics"*, John Wiley and Sons, Inc. New York-London-Sydney, (1968)

[14] — *H. HAKEN*, *„Quantum Optics"*, editat de S.M. Kay şi A. Maitland, Academic, Press, New York, (1970)

[15] — *R. J. GLAUBER*, *„Quantum Optics"* Academic Press, New York, (1969)

[16] — *P. GRIVET, N. BLOEMBERGEN*, Quantum Electronics Procedings of the Third International Congress, Paris, Columbia University Press, New York (1964)

[17] — *A. MAITLAND* and H. M. DUNN, Laser Physics North-Holland Publishing Company Amsterdam-London (1969)

[18] — *G.H. HEARD*, Laser Parameter Measurements Handbook, John Wiley Sons, Inc., New York-London-Sydney (1968)

[19] — *John F. READY*, Effects of High-Power Laser Radiation, Academic Press, New York London (1971)

[20] — Deistvie lazernovo izlucenia Sbornic statei, Izdatelstvo Mir Moscva (1968)

[21] — *F.T. ARECCHI* şi *E.O. SCHULZ — DUBOIS* (Editors), *„Laser Handbook"* volume II, North-Publishing Company, Amsterdam, (1972).

Au mai fost consultate articole din următoarele reviste, apărute în perioada 1960—1973: — Physical Review; — Physical Review Letters; — Review of Modern Physics; — Applied Optics; — Uspehi Fizicieskih Nauk; — Optika i Spektroscopiia; — Journal of Applied Physics; — The Journal of Optical Society of America; — Lasers and Optics Technology; — Optics Communications; — IEEE, Journal of Quantum Electronics; — L'onde Electrique; — Bell System Technical Journal; ş.a.

CUPRINS